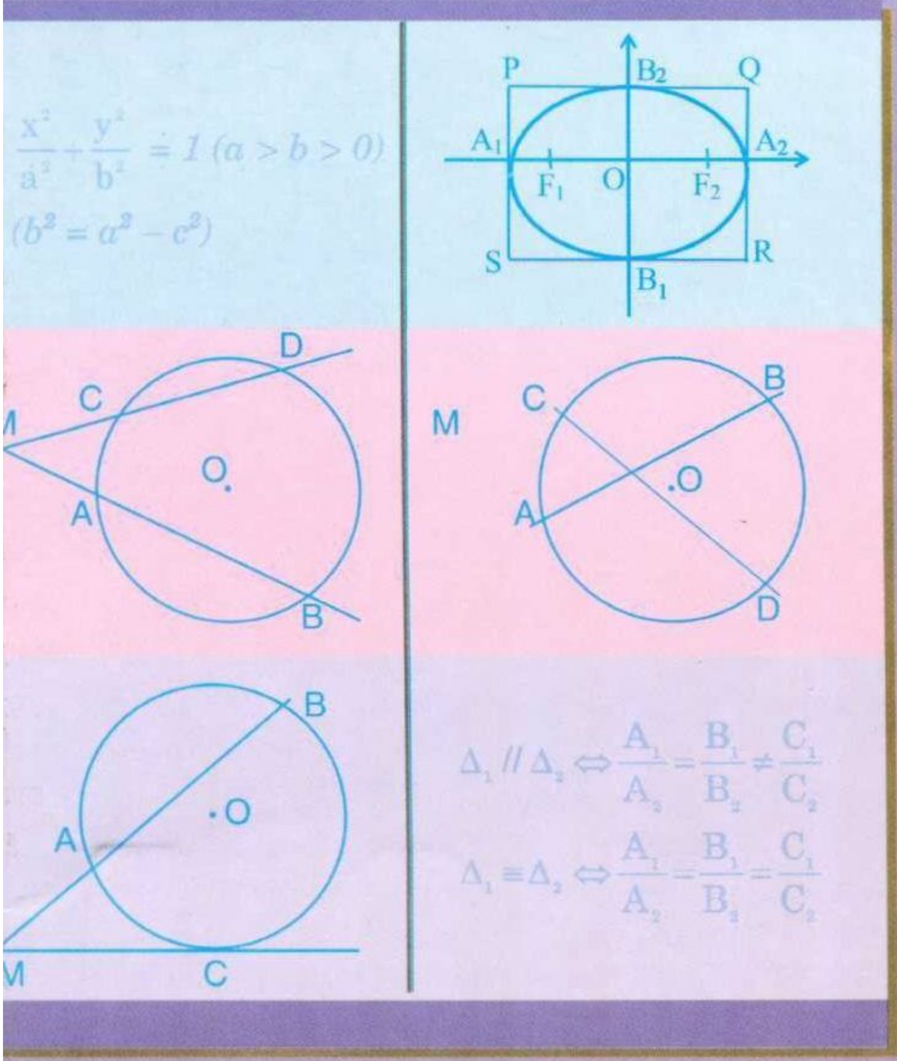
TS. VŨ THẾ HỰU

TOÁN 10

CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

TẬP HAI


$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\ (a > b > 0)$
$(b^2 = a^2 - c^2)$
P
B2
Q
A1
A2
F1
O
F2
S
R
B1
D
C
M
O
A
B
C
B
M
O
A
D
B
O
A
M
C
$\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$
$\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

TS. VŨ THẾ HỰU

TOÁN CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

10

TẬP 2

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

PHẦN I

KIẾN THỨC CƠ BẢN - VÍ DỤ - BÀI TẬP

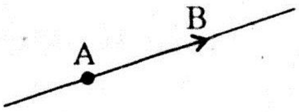
Chương I VECTƠ

§1. *Vectơ. Phép cộng và phép trừ vectơ*

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Khái niệm vectơ

a) ***Vectơ*** *là đoạn thẳng định hướng, nghĩa là có chỉ rõ một đầu mút là* ***điểm đầu****, một đầu mút là* ***điểm cuối****. Vectơ có điểm đầu là A, điểm cuối là B kí hiệu là* $\overrightarrow{AB}$.



Nếu $A \equiv B$ *thì* $\overrightarrow{AB}$ *là* ***vectơ không****, kí hiệu* $\overrightarrow{0}$.

Đường thẳng AB gọi là ***giá*** *của vectơ* $\overrightarrow{AB}$. *Độ dài của đoạn thẳng AB gọi là độ dài của vectơ* $\overrightarrow{AB}$, *kí hiệu* $|\overrightarrow{AB}|$.

b) ***Phương và hướng***

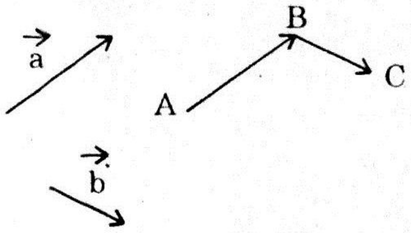
Hai vectơ có ***giá song song hay trùng nhau*** *là hai vectơ* ***cùng phương****. Hai vectơ cùng phương thì* ***cùng hướng*** *hoặc* ***ngược hướng****.*

c) ***Hai vectơ bằng nhau***

$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$ *khi* $\overrightarrow{a}$ *và* $\overrightarrow{b}$ ***cùng hướng*** *và* ***độ dài bằng nhau.***

2. Tổng của hai vectơ

a) ***Định nghĩa.*** *Cho hai vectơ* $\overrightarrow{a}$ *và* $\overrightarrow{b}$. *Lấy điểm A tùy ý và xác định hai điểm B và C sao cho* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$ *và* $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{b}$. *Khi đó vectơ* $\overrightarrow{AC}$ *được gọi là* ***tổng*** *của hai vectơ* $\overrightarrow{a}$ *và* $\overrightarrow{b}$, *kí hiệu là* $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$.



b) ***Tính chất của tổng các vectơ***

+ *Tính chất giao hoán :* $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$

+ *Tính chất kết hợp :* $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$

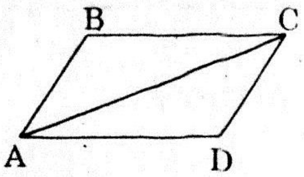
+ *Tính chất của vectơ* $\overrightarrow{0}$: $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{a}$ *với mọi* $\overrightarrow{a}$

c) Hai quy tắc của phép cộng vectơ

i) Quy tắc ba điểm

Với ba điểm A, B, C bất kì ta luôn có :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



ii) Quy tắc hình bình hành

Nếu ABCD là hình bình hành thì :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}, \qquad \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$$

3. Hiệu của hai vectơ

a) Vectơ đối *của vectơ* $\vec{a}$, *kí hiệu* $-\vec{a}$ *là vectơ có* ***cùng độ dài với*** $\vec{a}$ ***nhưng ngược hướng với*** $\vec{a}$.

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}.$$

b) Định nghĩa hiệu của hai vectơ

Hiệu của $\vec{a}$ *với vectơ* $\vec{b}$, *kí hiệu là* $\vec{a} - \vec{b}$

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

c) Định lí về hiệu vectơ

Cho vectơ $\overrightarrow{AB}$ *bất kì và O là điểm tùy ý thì :* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

B. CÁC VÍ DỤ GIẢI TOÁN

1.1 Cho G là trọng tâm của tam giác ABC. Chứng minh :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

Hướng dẫn

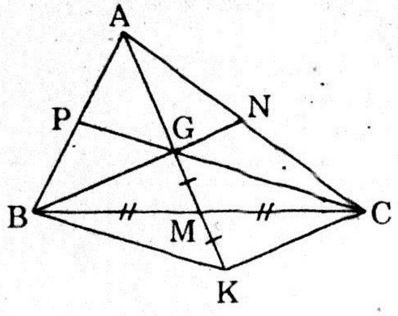
Kéo dài GM một đoạn MK = GM thì GBKC là hình bình hành.

Theo quy tắc hình bình hành :

$$\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GK}$$

Theo tính chất của trọng tâm ta có :

$$AG = 2GM = GK$$



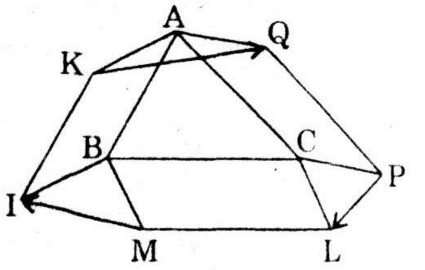
Do đó : $\overrightarrow{GK} = -\overrightarrow{GA}$.

Suy ra : $\overrightarrow{GA} + (\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GK} = \overrightarrow{GA} + (-\overrightarrow{GA}) = \vec{0}$.

1.2 Cho tam giác ABC. Dựng phía ngoài tam giác các hình bình hàn ABIK, BCLM và ACPQ. Chứng minh hệ thức : $\overrightarrow{KQ} + \overrightarrow{PL} + \overrightarrow{MI} = \vec{0}$.

Hướng dẫn

Theo quy tắc ba điểm ta có : $\overrightarrow{KQ} + \overrightarrow{PL} + \overrightarrow{MI} =$



$= \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CL} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BI}$

$= (\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{BI}) + (\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{PC}) + (\overrightarrow{CL} + \overrightarrow{MB})$

$= \vec{0} + \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$.

1.3 Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ khi và chỉ khi trung điểm của đoạ thẳng BC trùng với trung điểm của đoạn thẳng AD.

Hướng dẫn

Giả sử O là trung điểm của đoạn thẳng BC. Theo quy tắc về hiệ vectơ ta có :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} \Leftrightarrow \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}$$

Vì O là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$. Do đó $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ chứng tỏ O là trung điểm của đoạn thẳng AD.

C. BÀI TẬP TỰ GIẢI

1.4 Cho hình bình hành ABCD có giao điểm hai đường chéo là O Chứng minh các hệ thức :

a) $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DA}$

c) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} = \vec{0}$

d) $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}$.

1.5 Cho hình lục giác đều ABCDEF tâm O. Xét tập hợp các vectơ c điểm đầu, điểm cuối là các điểm trong số các đỉnh và tâm của lục giác.

a) Tìm các vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{AB}$.

b) Tìm các vectơ là vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{CD}$.

c) Chứng minh các hệ thức :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \vec{0}\ ; \quad \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}\ ; \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{AD}.$$

6 Cho tam giác đều ABC trực tâm H. Đường thẳng song song với BC và đi qua H cắt AB tại M và cắt AC tại N. Chứng minh rằng :

$$|\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}| = 2|\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}|.$$

7 Cho tứ giác bất kì ABCD. Gọi E là trung điểm của AB, F là trung điểm của CD, O là trung điểm của EF. Chứng minh :

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ **b)** $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

8 Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F. Chứng minh hệ thức :

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE}.$$

9 Cho tam giác vuông cân ABC với $\widehat{A} = 90^0$. Tìm độ dài của vectơ $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$, biết AB = 5cm.

10 Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Vẽ các vectơ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{GC}$, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{GB}$. Chứng minh :

a) $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{BC}$ **b)** G là trung điểm của EC.

11 Cho tam giác ABC, M là một điểm bất kì không thuộc các đường thẳng AB, BC và CA. Gọi A', B', C' theo thứ tự là các điểm đối xứng của M qua trung điểm của các cạnh BC, AC và AB. Chứng minh rằng ba đường thẳng AA', BB' và CC' đồng quy.

§2. *Tích của một vectơ với một số*

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Định nghĩa

Tích của vectơ $\vec{a}$ với số thực k là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, được xác định như sau :

i) Nếu $k \geq 0$ thì $k\vec{a}$ cùng hướng với $\vec{a}$. Nếu $k < 0$ thì $k\vec{a}$ ngược với $\vec{a}$.

ii) Độ dài vectơ $k\vec{a}$ bằng $|k|\,|\vec{a}|$.

2. Các tính chất của tích một vectơ với một số

Với mọi vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và mọi số thực k, l ta có :

1) $k(l\vec{a}) = (kl)\vec{a}$

2) $(k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$

3) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$; $\quad k(\vec{a} - \vec{b}) = k\vec{a} - k\vec{b}$

4) $k\vec{a} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad k = 0$ *hoặc* $\vec{a} = \vec{0}$

3. Điều kiện để hai vectơ cùng phương

Vectơ $\vec{b}$ cùng phương với vectơ $\vec{a}$ $(\vec{a} \neq \vec{0})$ khi và chỉ khi có số thực k sao cho $\vec{b} = k\vec{a}$.

Định lí : *Điều kiện cần và đủ để ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng là có số thực k sao cho : $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.*

4. Biểu thị một vectơ theo hai vectơ không cùng phương

Định lí : *Cho hai vectơ không cùng phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Khi đó với mỗi vectơ $\vec{x}$, tồn tại một cặp số duy nhất m và n sao cho :*

$$\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b}$$

Như vậy ta nói vectơ $\vec{x}$ được biểu thị một cách duy nhất qua $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

B. CÁC VÍ DỤ GIẢI TOÁN

1.12 Cho 5 điểm A, B, C, D, M bất kì. Gọi E là trung điểm của AB, F là trung điểm của CD, O là trung điểm của EF. Chứng minh rằng :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}.$$

Hướng dẫn

Ta có :

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OD}$$

$$= 4\,\overrightarrow{MO}+(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$$

Theo kết quả bài 1.7 thì $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

Vậy : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\,\overrightarrow{MO}$.

1.13 Cho tam giác ABC có trọng tâm G, tam giác A'B'C' có trọng tâm G'. Chứng minh hệ thức : $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=3\,\overrightarrow{GG'}$.

Hướng dẫn

$$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'A'}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'B'}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GG'}+$$

$$= (\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG})+(\overrightarrow{G'A'}+\overrightarrow{G'B'}+\overrightarrow{G'C'})+3\,\overrightarrow{GG'}$$

Theo kết quả bài 1.1 ta có : $\overrightarrow{G'A}+\overrightarrow{G'B'}+\overrightarrow{G'C'}=\vec{0}$,

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=(-\overrightarrow{AG})+(-\overrightarrow{BG})+(-\overrightarrow{CG})=\vec{0}$$

Từ đó suy ra : $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=3\,\overrightarrow{GG'}$

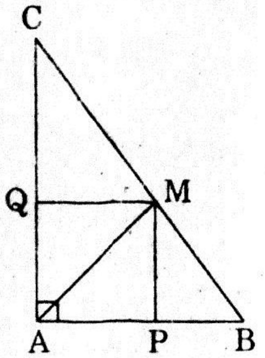
Khi G' ≡ G thì $\overrightarrow{GG'}=\vec{0}$. Từ đó suy ra điều kiện cần và đủ để ha tam giác ABC và A'B'C' có cùng trọng tâm là : $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$

1.14 Cho tam giác vuông ABC vuông tại A. Cho M là một điểm trê cạnh BC sao cho : $\dfrac{MB}{MC}=\dfrac{2}{3}$. Biết AB = 5cm, AC = 12cm.

a) Hãy biểu thị $\overrightarrow{AM}$ qua các vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

b) Tính $|\overrightarrow{AM}|$.

Hướng dẫn



a) Kẻ MQ vuông góc với AC tại Q, MP vuông góc với AB tại P. Ta có :

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}$$

$$\frac{AP}{AB} = \frac{MC}{BC} = \frac{MC}{\frac{2}{3}MC + MC} = \frac{3}{5} \Rightarrow \quad \overrightarrow{AP} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$$

Tính tương tự ta được $\overrightarrow{AQ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$. Vậy : $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$

b) $$|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{AP^2 + AQ^2} = \sqrt{\left(12.\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}.5\right)^2} \approx 5,66cm.$$

1.15 Cho tam giác ABC. Hãy xác định điểm I trên mặt phẳng thỏa mãn hệ thức : $3\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$ (1)

Hướng dẫn

(1) $\Leftrightarrow \quad 3\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \quad 5\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AI} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$

trong đó D là trung điểm của BC, khi đó **I** là điểm **nằm trên trung tuyến AD** thỏa mãn : 5AI = 2AD.

1.16 **Cho tam giác** ABC và các điểm M, N, P sao cho :

$$\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MC}; \quad \overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NC} = \vec{0}; \quad \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = 0$$

a) Hãy biểu thị $\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PN}$ qua $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh M, N, P thẳng hàng.

Hướng dẫn

a)• $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AP}$ (1

$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ (2

$\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MC} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} = 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM})$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ (3

Từ (1), (2), (3) ta được $\overrightarrow{PM} = 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ (4

• $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AP}$ (5

$$\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NC} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{AC} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \qquad (6)$$

Thế biểu thức của $\overrightarrow{AN}$ và $\overrightarrow{AP}$ vào (2) ta được : $\overrightarrow{PN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ (7)

b) Từ (4) và (7) ta được : $\overrightarrow{PM} = 3\overrightarrow{PN}$. Suy ra P, M, N thẳng hàng.

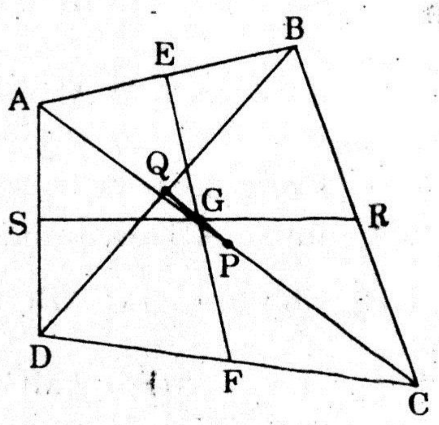
.17 Cho tứ giác ABCD bất kì. Gọi E, F, P, Q, R, S theo thứ tự là trung điểm của AB, CD, AC, BD, BC và AD. Chứng minh các đường thẳng EF, PQ và RS đồng quy.

Hướng dẫn

Gọi G là trung điểm của EF. Ta có :

$$(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}) + (\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) = 2\overrightarrow{GE} + 2\overrightarrow{GF} = 2(\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF}) = \vec{0}$$

Mặt khác ta lại có :



$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} =$$

$$= (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD}) + (\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})$$

$$= 2\overrightarrow{GS} + 2\overrightarrow{GR} = 2(\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{GR}) = \vec{0}$$

Chứng tỏ G, S, R thẳng hàng, hay RS đi qua G. Tương tự ta có :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC}) + (\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD}) = 2(\overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GQ}) = \vec{0}$$

Suy ra G, P, Q thẳng hàng hay PQ đi qua G.

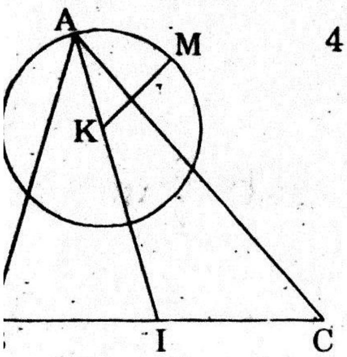
Như vậy EF, PQ, RS đồng quy tại G.

.18 Cho tam giác ABC. Tìm quĩ tích các điểm M thỏa mãn hệ thức :

$$|4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| \qquad (1)$$

Hướng dẫn

Giả sử K là một điểm trên mặt phẳng, ta có :



$$4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 4(\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KA}) + \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KC}$$

$$= 6\overrightarrow{MK} + 4\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC}$$

$$2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MA} - (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) - (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC})$$

$$= -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

$$(1) \Leftrightarrow \left|6\overrightarrow{MK} + 4\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC}\right| = \left|-(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})\right|$$

Gọi I là trung điểm của BC thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$

Ta chọn K sao cho $4\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AC} = 6\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 6\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{AI} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AI}$$

Suy ra K cố định. Khi đó :

$$(1) \Leftrightarrow \left|6\overrightarrow{MK}\right| = \left|2\overrightarrow{AI}\right| \Rightarrow \left|\overrightarrow{MK}\right| = \left|\frac{\overrightarrow{AI}}{3}\right| = \left|\overrightarrow{AK}\right|$$

Vậy quĩ tích M là đường tròn tâm K bán kính $R = \frac{1}{3}AI$.

C. BÀI TẬP TỰ GIẢI

1.19 Cho hình bình hành ABCD tâm O. Gọi trung điểm của BC, CD theo thứ tự là P, Q. Hãy biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AQ}$, $\overrightarrow{PQ}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AO}$.

1.20 Cho tứ giác ABCD. Gọi I, K theo thứ tự là trung điểm của BC và CD. Chứng minh :

a) $2\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$ **b)** $2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{DA}) = 3\overrightarrow{DB}$

1.21 Cho tam giác ABC.

a) Xác định điểm K thỏa mãn hệ thức : $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC} = \vec{0}$

b) Xác định điểm M thỏa mãn : $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$

c) Xác định điểm N thỏa mãn : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{NB} - \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

1.22 Cho lục giác ABCDEF. Gọi M, N, P, Q, R, S theo thứ tự là trung điểm của AB, BC, CD, DE, EF, FA. Chứng minh các tam giác MPR và NQS có cùng trọng tâm.

1.23 Cho tam giác ABC và các điểm I, J, K xác định bởi các hệ thức :

$$3\overrightarrow{IC}+2\overrightarrow{IB}=\vec{0};\qquad 2\overrightarrow{JC}+3\overrightarrow{JA}=\vec{0};\qquad 2\overrightarrow{KA}+3\overrightarrow{KB}=\vec{0}.$$

Chứng minh rằng các tam giác ABC và IJK có cùng trọng tâm.

1.24 Cho tứ giác ABCD. Hãy tìm số k và điểm cố định I sao cho v điểm M bất kì ta có : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=k\,\overrightarrow{MI}$.

1.25 Cho hình bình hành ABCD, M và N là các điểm trên cạnh AB v CD sao cho $\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{CN}{CD}=\dfrac{1}{2}$.

a) Biểu thị $\overrightarrow{AN}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

b) G là trọng tâm tam giác BMN. Biểu thị $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

1.26 Cho tam giác ABC, M và N là các điểm xác định bởi các hệ thức $3\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}=\vec{0}$; $\overrightarrow{CN}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Gọi G là trọng tâm tam giác AB

Chứng minh M, G, N thẳng hàng.

1.27 Cho tam giác ABC và điểm M di động.

Đặt $\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$.

a) Chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua điểm cố định khi M động.

b) Gọi P là trung điểm của CN. Chứng minh MP đi qua điểm định khi M di động.

1.28 Cho tam giác đều ABC với điểm M tuỳ ý trên cạnh BC. Gọi ME v MF là các đường vuông góc kẻ từ M đến AC và AB. Gọi I là trun điểm của EF. Chứng minh rằng MI luôn đi qua một điểm cố địn khi M di động trên BC.

1.29 Cho tam giác đều ABC tâm O. Lấy điểm M bất kì trong tam giá và kẻ các đường vuông góc xuống các cạnh BC, CA, AB là MP, M và MR. Gọi K là trọng tâm của tam giác PQR.

a) Chứng minh M, O, K thẳng hàng.

b) N là điểm tùy ý trên BC. Vẽ các đường vuông góc NE, NF tươn ứng xuống AB, AC. Chứng minh N, J, O thẳng hàng, trong đó là trung điểm của EF.

1.30 Cho các điểm cố định A, B phân biệt. Tìm quĩ tích (tập hợp) các điểm M thỏa mãn hệ thức : $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$.

1.31 Cho tam giác ABC. Tìm quĩ tích (tập hợp) các điểm M thỏa mãn hệ thức : $|4\,\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} + 2\,\overrightarrow{MC}|$.

1.32 Cho tam giác đều ABC tâm O, M là điểm bất kì trong tam giác có hình chiếu xuống các cạnh BC, CA, AB là D, E, F.

a) Chứng minh : $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$.

b) Tìm quĩ tích (tập hợp) các điểm M sao cho :

$$|\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}| = k \quad (k > 0 \text{ không đổi}).$$

1.33 Cho tam giác ABC, M là trung điểm của cạnh AB. D, E, F là ba điểm theo thứ tự được xác định bởi các hệ thức :

$$3\,\overrightarrow{DB} - 2\,\overrightarrow{DC} = \vec{0}\,; \qquad \overrightarrow{EA} + 3\,\overrightarrow{EB} = 2\,\overrightarrow{EC}\,; \qquad 5\,\overrightarrow{AF} - 2\,\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

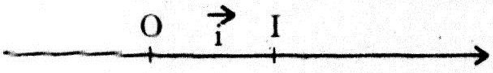
a) Chứng minh EM // BC.

b) Chứng minh ba đường thẳng AD, BC, MF đồng quy.

§3. Trục tọa độ và hệ trục tọa độ

A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

1. Trục tọa độ



Một trục tọa độ *$(O; \vec{i})$ là một **đường thẳng** trên đó đã chọn điểm O làm gốc **tọa độ** và vectơ $\vec{i}$ **làm vectơ đơn vị.***

2. Tọa độ của một điểm, một vectơ trên trục tọa độ

- *Cho điểm M trên trục $(O; \vec{i})$ thì : $\overrightarrow{OM} = m\,\vec{i}$*

  *Số m gọi là **tọa độ của M đối với trục** $(O; \vec{i})$*

- *Vectơ $\vec{a}$ trên trục $(O; \vec{i})$ thì : $\vec{a} = a\,\vec{i}$*

  *Số a là **tọa độ của vectơ** $\vec{a}$ **đối với trục** $(O; \vec{i})$*

3. Độ dài đại số trên trục

Trên trục $(O; \vec{i})$ *cho hai điểm A, B thì :* $\overrightarrow{AB} = \overline{AB}\,\vec{i}$

$\overline{AB}$ *là tọa độ của vectơ* $\overrightarrow{AB}$, *gọi là* ***độ dài đại số của vectơ*** $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{AB} = \overline{CD}$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC} \quad \text{(hệ thức Sa lơ)}$$

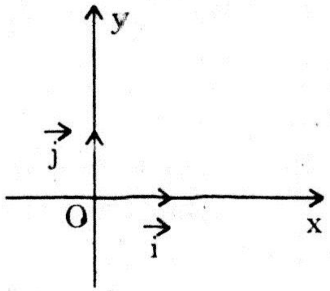
4. Hệ trục tọa độ

Một hệ hai trục tọa độ vuông góc với nhau :

Ox với vectơ đơn vị $\vec{i}$, *Oy với vectơ đơn vị* $\vec{j}$

là ***hệ trục tọa độ vuông Oxy hay*** $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Điểm O là ***gốc tọa độ***, *Ox là* ***trục hoành***, *Oy là* ***trục tung***.



5. Tọa độ của vectơ đối với hệ trục tọa độ

Đối với hệ trục tọa độ $(O; \vec{i}; \vec{j})$, *nếu :* $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$

thì cặp số (x; y) là ***tọa độ của vectơ*** $\vec{a}$ ***đối với hệ trục tọa độ*** $(O; \vec{i}; \vec{j})$, *kí hiệu là* $\vec{a} = (x; y)$ *hay* $\vec{a}(x; y)$.

Số x là ***hoành độ*** *của* $\vec{a}$, *số y là* ***tung độ*** *của* $\vec{a}$

$$\vec{a}(x; y) = \vec{b}(x'; y') \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

6. Biểu thức tọa độ của các phép toán vectơ

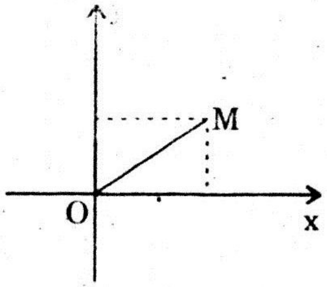
Cho $\vec{a} = (x; y)$, $\vec{b} = (x'; y')$ *thì :*

1) $\vec{a} + \vec{b} = (x + x'; y + y')$, $\quad \vec{a} - \vec{b} = (x - x'; y - y')$

2) $k\vec{a} = (kx; ky) \quad k \in R$

3) $\vec{a}$ *cùng phương với* $\vec{b}$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{x}{x'} = \dfrac{y}{y'}$ $(x' \neq 0, y' \neq 0)$

7. Tọa độ của một điểm



Tọa độ của điểm M *trong mặt phẳng tọa độ Oxy là tọa độ của vectơ* $\overrightarrow{OM}$.

Định lí : *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm* $M(x_M; y_M)$ *và* $N(x_N; y_N)$ *thì :*

$$\overrightarrow{MN} = (x_N - x_M ; y_N - y_M)$$

8. Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng

Cho hai điểm $M(x_M; y_M)$ *và* $N(x_N; y_N)$, *P là* ***trung điểm của đoạn thẳng MN*** *thì tọa độ của P là* $(x_P; y_P)$ *với :*

$$x_P = \frac{x_M + x_N}{2} ; \qquad y_P = \frac{y_M + y_N}{2} .$$

9. Tọa độ trọng tâm của tam giác

Cho G là trọng tâm của tam giác ABC với $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$ *thì tọa độ của* $G(x_G; y_G)$ *với :*

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} ; \qquad y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

B. CÁC VÍ DỤ GIẢI TOÁN

1.34 Trên trục tọa độ $(O; \vec{i})$ cho 4 điểm A, B, C, D. Gọi I, K, M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AC, BD, AB, CD. Chứng minh rằng các đoạn thẳng IK và MN có cùng trung điểm.

Hướng dẫn

Gọi Q là trung điểm của IK, ta có : $\overline{QI} + \overline{QK} = 0$

I là trung điểm của AC nên : $2\overline{QI} = \overline{QA} + \overline{QC}$

K là trung điểm của BD nên : $2\overline{QK} = \overline{QB} + \overline{QD}$

Suy ra : $\overline{QA} + \overline{QC} + \overline{QB} + \overline{QD} = 2(\overline{QI} + \overline{QK})$

Mặt khác M là trung điểm của AB nên : $2\overline{QM} = \overline{QA} + \overline{QB}$

N là trung điểm của CD nên : $2\overline{QN} = \overline{QC} + \overline{QD}$

Suy ra : $2(\overline{QM}+\overline{QN}) = \overline{QA}+\overline{QB}+\overline{QC}+\overline{QD} = 2(\overline{QI}+\overline{QK}) = 0$.

Suy ra Q cũng là trung điểm của MN.

1.35 Trên trục tọa độ x'Ox cho 3 điểm A, B, C có tọa độ lần lượt là 3, 2, 4. Xác định các điểm I, K, M, biết :

a) $\overline{IA}+\overline{IB} = 0$ **b)** $\dfrac{\overline{KA}}{\overline{KC}} + \dfrac{\overline{KB}}{\overline{KI}} = 2$

c) $\overline{AI}.\overline{MC} - 3\overline{MB} = \overline{AC}$.

Hướng dẫn

a) Gọi tọa độ của I, K, M lần lượt là x, y, z, ta có :

$$\overline{IA}+\overline{IB} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad (3-x)+(2-x) = 0 \quad\Rightarrow\quad x = \frac{3+2}{2} = \frac{5}{2}$$

b) $$\frac{\overline{KA}}{\overline{KC}} + \frac{\overline{KB}}{\overline{KI}} = 2 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{3-y}{4-y} + \frac{2-y}{\frac{5}{2}-y} = 2 \quad\Leftrightarrow\quad y = 3.$$

c) $$\overline{AI}.\overline{MC} - 3\overline{MB} = \overline{AC} \quad\Leftrightarrow\quad \left(\frac{5}{2}-3\right).(4-z) - 3(2-z) = (4-3)$$

$$\Leftrightarrow\quad z = \frac{18}{7}$$

Như vậy K trùng với A.

1.36 Trên trục tọa độ x'Ox cho 3 điểm A, B, C có tọa độ theo thứ tự là 2, 3, 5. Trong mỗi trường hợp sau đây, hãy xác định điểm M thỏa mãn điều kiện tương ứng :

a) $5\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ **b)** $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Hướng dẫn

a) Gọi tọa độ của M là x, ta có :

$$5\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC} = \vec{0} \quad\Leftrightarrow\quad 5(2-x) - 3(3-x) + 4(5-x) = 0$$

$$\Leftrightarrow\quad x = \frac{7}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{OM} = \frac{7}{2}\vec{i}$$

b) $$\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 5\overrightarrow{MC} = \vec{0} \quad\Leftrightarrow\quad (2-x) - 2(3-x) + 5(5-x) = 0$$

$$\Leftrightarrow\quad x = \frac{21}{4} \quad\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{OM} = \frac{21}{4}\vec{i}.$$

1.37 Trong hệ trục tọa độ vuông góc Oxy, cho các vectơ $\vec{a}(3; -2)$, $\vec{b}(2; 3)$. Tìm tọa độ của các vectơ :

a) $\vec{a} + \vec{b}$ **b)** $2\vec{a} - 3\vec{b}$.

Hướng dẫn

a) $\vec{a} + \vec{b} = (3; -2) + (2; 3) = (3 + 2; -2 + 3) = (5; 1)$

b) $2\vec{a} - 3\vec{b} = 2(3; -2) - 3(2; 3) = (6; -4) + (-6; -9) = (0; -13)$.

1.38 Trong hệ trục tọa độ vuông góc Oxy cho các điểm A(1; 2), B(−1; 1), C(2; 3).

a) Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

b) Biểu thị các vectơ $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{GC}$, $\overrightarrow{BG}$ qua các vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Hướng dẫn

a) $G(x_G; y_G)$,

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{1 - 1 + 2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{2 + 1 + 3}{3} = 2$$

Vậy $G\left(\frac{2}{3}; 2\right)$.

b) Ta có : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

$$GC = (x_C - x_G; y_C - y_G) = \left(2 - \frac{2}{3}; 3 - 2\right) = \left(\frac{4}{3}; 1\right)$$

$$\overrightarrow{GC} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC} = m(-1 - 1; 1 - 2) + n(2 - 1; 3 - 2) = \left(\frac{4}{3}; 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad (-2m; -m) + (n; n) = (-2m + n; -m + n) = \left(\frac{4}{3}; 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2m + n = \dfrac{4}{3} \\ -m + n = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\dfrac{1}{3} \\ n = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Vậy $\overrightarrow{GC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRUNG TÂM THÔNG TIN THƯ VIỆN
LC/ 2505

$$\overrightarrow{BG} = (x_G - x_B;\ y_G - y_B) = \left(\frac{5}{3};\ 1\right)$$

$$\overrightarrow{BG} = p\,\overrightarrow{AB} + q\,\overrightarrow{AC} = p(-2;\ -1) + q(1;\ 1) = (-2p;\ -p) + (q;\ q)$$

$$= (-2p + q;\ -p + q) = \left(\frac{5}{3};\ 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -2p + q = \dfrac{5}{3} \\ -p + q = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} p = -\dfrac{2}{3} \\ q = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{BG} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

1.39 Trên hệ trục tọa độ vuông Oxy cho ba điểm A(2; 6), B(–3; –4) và C(5; 0).

a) Chứng minh tam giác ABC vuông.

b) Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Hướng dẫn

a) Ta có : $\overrightarrow{AB} = (-5;\ -10)$; $\quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-5)^2 + (-10)^2} = \sqrt{125}$

$\overrightarrow{AC} = (3;\ -6)$; $\quad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{3^2 + (-6)^2} = \sqrt{45}$

$\overrightarrow{BC} = (8;\ 4)$; $\quad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80}$

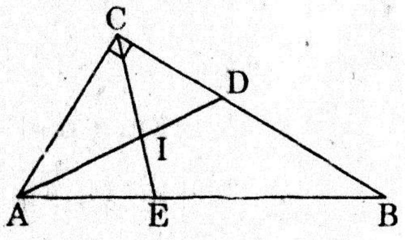
Tam giác ABC vuông tại C.

b) Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

I là giao điểm của các phân giác AD và CE. Theo tính chất phân giác ta có :

$$\frac{DC}{DB} = \frac{AC}{AB} \qquad (1)$$

$$\frac{ID}{IA} = \frac{CD}{CA} \qquad (2)$$



+ Trước hết ta xác định tọa độ của D :

$$\frac{DC}{DB} = \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{125}} = \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{DC} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{DB}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x_C - y_D = -\dfrac{3}{5}(x_B - x_D) \\ y_C - y_D = -\dfrac{3}{5}(y_B - y_D) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 5 - x_D = -\dfrac{3}{5}(-3 - x_D) \\ 0 - y_D = -\dfrac{3}{5}(-4 - y_D) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad D\left(2; -\frac{3}{2}\right)$$

+ Tính tọa độ của I : Từ (2) ta có : $\overrightarrow{ID} + \dfrac{CD}{CA}\overrightarrow{IA} = \vec{0}$ (3)

$$CD = \sqrt{(2-5)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{45}}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{CD}{CA} = \frac{1}{2}$$

Thay $\dfrac{CD}{CA} = \dfrac{1}{2}$ vào (3) thì được :

$$(x_D - x_I;\ y_D - y_I) + \frac{1}{2}(x_A - x_I;\ y_A - y_I) = (0;\ 0)$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2 - x_I + \dfrac{1}{2}(2 - x_I) = 0 \\ -\dfrac{3}{2} - y_I + \dfrac{1}{2}(6 - y_I) = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad I(2;\ 1).$$

B. BÀI TẬP TỰ GIẢI

1.40 Trên trục tọa độ x'Ox cho hai điểm A, B có tọa độ theo thứ tự là −2, 3. Tìm tọa độ các điểm C, D, E, F sao cho :

a) C là trung điểm của AB. **b)** D là điểm đối xứng với B qua A.

c) $\dfrac{\overline{EA}}{\overline{EB}} = -3$ **d)** $\overrightarrow{AF} + 4\overrightarrow{FB} = \vec{0}$.

1.41 Trên trục tọa độ x'Ox cho 4 điểm A, B, C, D. Chứng minh :

a) $\overline{AB}.\overline{CD} + \overline{AC}.\overline{DB} + \overline{AD}.\overline{BC} = 0$

b) Nếu $\dfrac{2}{\overline{AB}} = \dfrac{1}{\overline{AC}} + \dfrac{1}{\overline{AD}}$ thì $\overline{CA}.\overline{DB} + \overline{CB}.\overline{DA} = 0$.

1.42 Trên trục tọa độ x'Ox cho các điểm A, B, C, D, M, N thỏa mãn các điều kiện : $\overline{AB} = 5$, $\overline{BC} = 1$, $\overline{CD} = 3$, $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MC}} = \dfrac{5}{3}$, $\dfrac{\overline{NB}}{\overline{NC}} = -\dfrac{5}{3}$. Gọi trung điểm của AB, CD theo thứ tự là I và K.

Tính các tỉ số $\frac{\overline{MI}}{\overline{MK}}$ và $\frac{\overline{NI}}{\overline{NK}}$.

1.43 Cho hai điểm A(1; 2), B(–1; 3).

a) Xác định tọa độ của các vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BA}$.

b) Tìm tọa độ điểm I sao cho $\overrightarrow{BI} = (3; 0)$.

c) Tìm điểm K sao cho $\overrightarrow{KA} = (1; 1)$.

1.44 Cho các vectơ $\vec{a}(1; -1)$, $\vec{b}(-2; 3)$. Xác định tọa độ của vectơ $\vec{c} = 3\vec{a} - 4\vec{b}$.

1.45 Hãy biểu diễn vectơ $\vec{c}$ qua các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, biết :

a) $\vec{a}(-1; 2)$, $\vec{b}(2; 3)$, $\vec{c}(-3; 5)$. **b)** $\vec{a}(2; 1)$, $\vec{b}(-3; 4)$, $\vec{c}(1; 3)$.

1.46 Cho tam giác ABC với A(–1; 3), B(2; 4), C(0; 1). Tìm tọa độ ;

a) Vectơ trung tuyến $\overrightarrow{AA_1}$

b) Tâm I của đường tròn ngoại tiếp ΔABC

c) Điểm D sao cho ABCD là hình bình hành.

1.47 Cho ba điểm A(3; 1), B(1; 2) và C(7; –1).

a) Chứng tỏ rằng ba điểm A, B, C thẳng hàng

b) Xác định điểm D sao cho $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$.

1.48 Cho ba điểm A(1; 0), B(–3; –5), C(0; 3).

a) Xác định điểm D sao cho D đối xứng với A đối với B.

b) Tìm quĩ tích (tập hợp) các điểm M sao cho :

$$\left|2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) - 3\overrightarrow{MC}\right| = \left|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right|.$$

1.49 Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho hai điểm A(2; 1), B(6; –1).

a) Tìm điểm M trên trục Ox sao cho A, B, M thẳng hàng.

b) Tìm điểm N trên trục Oy sao cho A, B, N thẳng hàng.

1.50 Cho M(–1; 1), N(1; 9), P(9; 1) theo thứ tự là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC. Xác định tọa độ của A, B, C.

1.51 Cho các điểm A(0; 4), B(3; 2), C(3; 0).

a) Chứng minh A, B, C là các đỉnh của một tam giác.

b) Tìm chu vi của tam giác ABC.

1.52 Cho tam giác ABC. Biết A(1; 2), B(−2; −4), C(−1; 3).

a) Chứng minh rằng tam giác ABC vuông.

b) Tìm tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp.

c) Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Tìm tọa độ của vectơ $\overrightarrow{GI}$.

1.53 Cho hai điểm A(4; 2) và B(−1; 2) trong hệ trục vuông Oxy.

a) Tìm tọa độ trung điểm I của AB.

b) Chứng minh tam giác IBO cân.

c) Gọi K là điểm đối xứng của O đối với I. Hỏi tứ giác OAKB là hình gì ?

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG I

1.54 Cho tam giác ABC có các trung tuyến AA_1, BB_1, CC_1 cắt nhau tại G.

a) Chứng minh đẳng thức : $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$

b) Cho M là một điểm bất kì. Chứng minh : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

1.55 Cho tam giác ABC. Trên cạnh BC lấy các điểm D và E sao cho BD = DE = EC. Chứng minh : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AA_1}$ với AA_1 là trung tuyến của tam giác ABC kẻ từ A.

1.56 Cho tam giác ABC có tâm đường tròn nội tiếp là I. Gọi a, b, c lần lượt là các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh : $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

1.57 Cho tam giác ABC. Dựng điểm N sao cho $3\overrightarrow{NA} - 2\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}$.

1.58 Cho hình vuông ABCD tâm O. Chứng minh rằng các vectơ sau đây không phụ thuộc vào vị trí của điểm M trên mặt phẳng.

a) $\vec{a} = 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}$

b) $\vec{b} = 4\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}$.

1.59 Cho tam giác ABC. Gọi D là trung điểm của BC, E là trung điểm của AB, F là điểm trên cạnh AC sao cho CF = 2AF, K là trung điểm EF. Hãy biểu thị $\overrightarrow{AK}$ và $\overrightarrow{DK}$ qua $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

1.60 Cho tam giác ABC. Gọi D, E, F theo thứ tự là trung điểm của BC, CA, AB. Hãy biểu thị các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ theo các vectơ $\overrightarrow{BE}$ và $\overrightarrow{CF}$.

1.61 Cho tam giác ABC. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, AC. Hai điểm I, K được xác định bởi các hệ thức :

$$2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}\,; \qquad 2\overrightarrow{KA} + 5\overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KC} = \vec{0}$$

a) Chứng minh M, N, K thẳng hàng

b) Chứng minh K là trung điểm của BI.

1.62 Cho tam giác ABC có trực tâm H, trọng tâm G, tâm đường tròn ngoại tiếp O, M là trung điểm của cạnh BC, D là điểm đối xứng của A đối với O. Chứng minh :

a) $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$

b) $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$

c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$

d) O, H, G thẳng hàng.

1.63 Cho tứ giác ABCD. Gọi P là giao điểm của AD và BC; I, K lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng minh rằng nếu P, I, K thẳng hàng thì tứ giác ABCD là hình thang.

1.64 Cho hình bình hành ABCD, M là một điểm bất kì trên mặt phẳng. Hãy tìm số k và điểm cố định I sao cho

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD} = k\,\overrightarrow{MI} \text{ với mọi M.}$$

1.65 Trên trục tọa độ x'Ox cho các điểm A, B có tọa độ lần lượt là −2, 5.

a) Tìm tọa độ điểm M thỏa mãn hệ thức $3\overline{MA} + 5\overline{MB} = 0$

b) Cho điểm C trên trục x'Ox. Hãy biểu thị $\overrightarrow{AC}$ qua các vectơ $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{IA}$, với I là trung điểm của AB.

1.66 Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho các điểm A(−1; 2), B(2; 1), C(3; 5).

a) Biểu thị vectơ $\overrightarrow{BC}$ qua $\overrightarrow{AG}$ và $\overrightarrow{AC}$, trong đó G là trọng tâm của tam giác ABC.

b) Xác định tọa độ điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$.

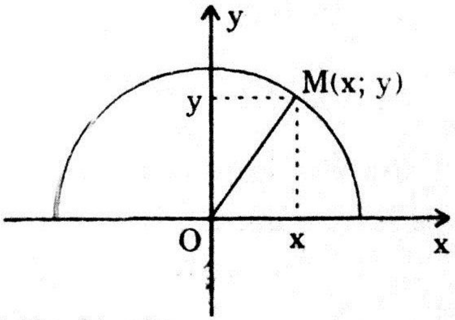
c) Tìm tọa độ điểm G' đối xứng với G qua A.

d) Tìm chu vi tam giác ABC.

Chương II

TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ VÀ ỨNG DỤNG

§1. Giá trị lượng giác của một góc bất kì (từ 0^0 đến 180^0)



1. Định nghĩa

Với mỗi góc α ($0^0 \le \alpha \le 180^0$) ta xác định một điểm M trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$.

Giả sử M có tọa độ M(x; y) thì :

- *Tung độ y của M gọi là* ***sin của góc α, kí hiệu là $\sin\alpha$.***
- *Hoành độ x của M gọi là* ***cosin của góc α, kí hiệu là $\cos\alpha$.***
- *Tỉ số $\frac{y}{x}$ (với $x \ne 0$) gọi là* ***tang của góc α, kí hiệu là $\tan\alpha$.***
- *Tỉ số $\frac{x}{y}$ (với $y \ne 0$) gọi là* ***cotang của góc α, kí hiệu là $\cot\alpha$.***

2. Tính chất

- *Nếu hai góc bù nhau thì sin của chúng bằng nhau, cosin, tang, cotang của chúng đối nhau.*
- *Nếu hai góc phụ nhau thì sin góc này bằng cosin của góc kia :*

- $\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha$
- $\cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha$
- $\tan(180^0 - \alpha) = -\tan\alpha$
- $\cot(180^0 - \alpha) = -\cot\alpha$
- $\sin(90^0 - \alpha) = \cos\alpha$
- $\cos(90^0 - \alpha) = \sin\alpha$
- $\cot(90^0 - \alpha) = \tan\alpha$

3. Giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt

Góc *GTLG*	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cosin	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	*KXĐ*	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
cot	*KXĐ*	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	*KXĐ*

B. CÁC VÍ DỤ GIẢI TOÁN

2.1 Tính giá trị của các biểu thức :

a) $A = 3 - \sin^2 60^0 \cos 60^0 + 2\cot 120^0 \tan 135^0$

b) $B = \dfrac{2\cos 135^0 + \sin 150^0}{\tan^2 30^0 + \cot^2 120^0}$.

Hướng dẫn

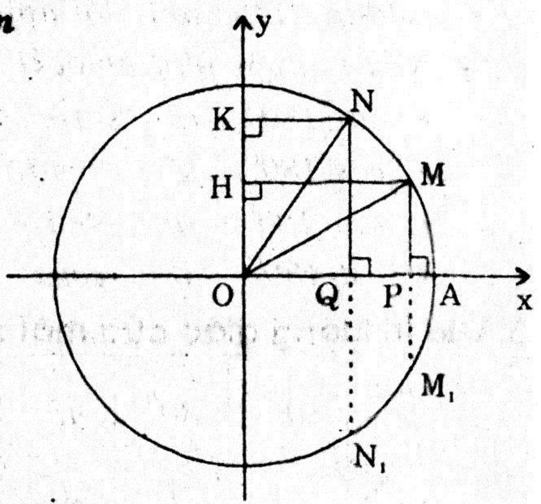
a) Sử dụng bảng giá trị lượng giác của các góc đặc biệt.

$$A = 3 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 . \frac{1}{2} + 2\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right).(-1) = \frac{21}{8} + \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

b)
$$B = \frac{-\sqrt{2} + \dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3}} = \frac{3 - 6\sqrt{2}}{4}$$

2.2 Dùng định nghĩa các giá trị lượng giác của một góc và các tính chất hình học, hãy chỉ rõ rằng : Nếu $0 < x < y < 90^0$ thì $\sin x < \sin y$ và $\cos x > \cos y$.

Hướng dẫn



Trên đường tròn đơn vị tâm O gắn với hệ trục tọa độ vuông Oxy (hình bên).

Đặt : $\widehat{AOM} = x$, $\widehat{AON} = y$

$x < y \quad \Leftrightarrow \quad \overset{\frown}{MM_1} < \overset{\frown}{NN_1}$

Suy ra dây cung MM_1 nhỏ hơn dây cung NN_1, suy ra :

$$\overline{OH} = \overline{PM} < \overline{QN} = \overline{OK} \quad \Leftrightarrow \quad \sin x < \sin y.$$

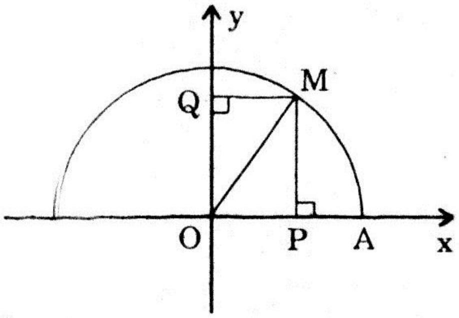
Dây cung MM_1 nhỏ hơn dây cung NN_1 nên khoảng cách đến tâm của NN_1 lớn hơn khoảng cách đến tâm của NN_1 :

$$\overline{OP} > \overline{OQ} \quad \Leftrightarrow \quad \cos x > \cos y.$$

2.3 Chứng minh các hệ thức : a) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

b) $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ c) $1 + \cot^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$

Hướng dẫn



a) Trên nửa đường tròn đơn vị tâm O gắn với hệ trục tọa độ Oxy. Điểm M trên nửa đường tròn. Đặt $\widehat{AOM} = x$.

Theo định nghĩa $\overline{OP} = \cos x$, $\overline{OQ} = \sin x$.

Ta có : $\sin^2 x + \cos^2 x = \overline{OQ}^2 + \overline{OP}^2 = OM^2 = 1$

b) Với $\cos x \neq 0$, $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$. Theo kết quả câu a) :

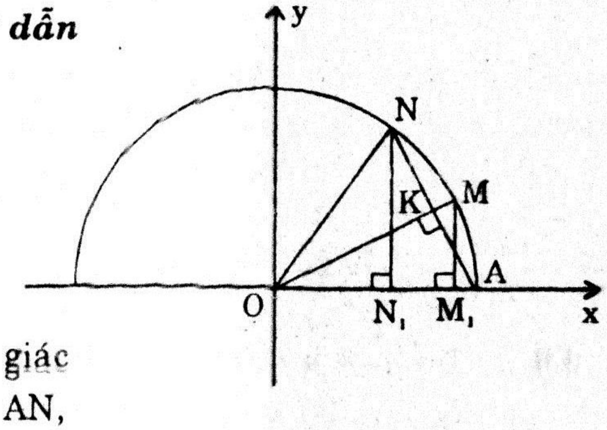
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x + 1.$$

c) Với $\sin x \neq 0$, $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

2.4 **Dùng định nghĩa** các giá trị lượng giác và các tính **chất hình học, hãy tìm các giá trị** lượng giác của góc $22^0 30'$, biết $\sin 45^0 = \cos 45^0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn



Trên hình $\widehat{AON} = 45^0$,

$\widehat{AOM} = 22^0 30'$,

$\sin 45^0 = \overline{ON_1} = \overline{N_1N} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Do OK là phân giác của tam giác **cân OAN kẻ từ** đỉnh ta có $OK \perp AN$,

$$AK = M_1M = \frac{1}{2}AN = \sin 22^0 30'$$

Ta có : $AN^2 = AN_1^2 + N_1N^2 = (OA - ON_1)^2 + N_1N^2$

$$= \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2 - \sqrt{2}$$

$$AN = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$\sin 22^0 30' = \frac{1}{2}AN = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos 22^0 30' = \sqrt{1-\sin^2 22^0 30'} = \sqrt{1-\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\tan 22^0 30' = \frac{\sin 22^0 30'}{\cos 22^0 30'} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{2}-1$$

$$\cot 22^0 30' = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1.$$

2.5 Cho $\tan x - \cot x = 1$, $90^0 < x < 180^0$. Tìm các giá trị lượng giác của góc x.

Hướng dẫn

Do $90^0 < x < 180^0$ nên $\cos x < 0$, $\tan x < 0$, $\cot x < 0$.

$$\tan x - \cot x = \tan x - \frac{1}{\tan x} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \tan^2 x - \tan x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$\cot x = \frac{2}{1-\sqrt{5}} = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\sin x = \sqrt{\frac{1}{1+\cot^2 x}} = \sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2}} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$$

$$\cos x = -\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}.$$

2.6 Cho $0^0 < x < 90^0$. Sử dụng công thức tính giá trị lượng giác của các góc bù nhau, phụ nhau, hãy chứng minh các đẳng thức :

$\sin(90^0 + x) = \cos x$; $\cos(90^0 + x) = -\sin x$

$\tan(90^0 + x) = -\cot x$; $\cot(90^0 + x) = -\tan x$

Hướng dẫn

a) Theo tính chất của các góc bù nhau :

$$\sin(90^0 + x) = \sin[180^0 - (90^0 + x)] = \sin[90^0 - x]$$

Theo tính chất của các góc phụ nhau : $\sin(90^0 - x) = \cos x$

Vậy $\sin(90^0 + x) = \cos x$.

b) Lập luận tương tự ta có :

$$\cos(90^0 + x) = -\cos[180^0 - (90^0 + x)] = -\cos(90^0 - x) = -\sin x.$$

c) $$\tan(90^0 + x) = \frac{\sin(90^0 + x)}{\cos(90^0 + x)} = \frac{\cos x}{-\sin x} = -\cot x$$

2.7 Chứng minh các đẳng thức :

a) $$\frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} = \frac{1}{\cos x(1 + \cos x)}$$

b) $$\frac{\sin x + \cos x - 1}{1 - \cos x} = \frac{2\cos x}{\sin x - \cos x + 1}.$$

Hướng dẫn

a) $$VT = \frac{\sin x}{\cos x \sin^3 x} - \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}\left(\frac{1}{\cos x} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{1 - \cos^2 x}\left(\frac{1 - \cos x}{\cos x}\right) = \frac{1}{(1 + \cos x)\cos x} = VP$$

b) Ta có : $(\sin x + \cos x - 1)(\sin x - \cos x + 1) = \sin^2 x - (\cos x - 1)^2$

$$= \sin^2 x - \cos^2 x - 1 + 2\cos x = \sin^2 x - \cos^2 x - \sin^2 x - \cos^2 x + 2\cos x$$

$$= -2\cos^2 x + 2\cos x = 2\cos x(1 - \cos x) \Rightarrow$$ ĐPCM.

2.8 Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc x :

a) $A = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x\cos^2 x$

b) $B = (\sin^4 x + \cos^4 x - 1)(\tan^2 x + \cot^2 x + 2).$

Hướng dẫn

a) $$A = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 + 3\sin^2 x\cos^2 x$$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x) + 3\sin^2 x\cos^2 x$$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x - \sin^2 x\cos^2 x + 3\cos^2 x\sin^2 x = 1$$

không phụ thuộc x.

b) $$B = [(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x - 1]\left[\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + 2\right]$$

$$= -2\sin^2 x\cos^2 x\left[\frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^2 x\cos^2 x} + 2\right]$$

$$= -2\sin^4 x - 2\cos^4 x - 4\sin^2 x\cos^2 x = -2(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = -2$$

không phụ thuộc x.

BÀI TẬP TỰ GIẢI

2.9 Tìm giá trị của các biểu thức sau (nhờ bảng các giá trị lượng giác của các góc đặc biệt) :

a) $A = 4 - \sin^2 60^0 + 2\cos 30^0 - 3\tan^2 45^0$

b) $B = 4\sin^4 135^0 + \sqrt{3}\cos^3 150^0 - 3\cot^2 120^0$

c) $C = 8 - \cos^2 30^0 + 2\sin^2 45^0 - \sqrt{3}\tan^2 60^0$

d) $D = \dfrac{a^2 \sin^2 90^0 + b^2 \cos 0^0}{a \cot 45^0 + b \cos 180^0 - 2a \cot 90^0}$.

2.10 Dùng định nghĩa giá trị lượng giác của một góc hãy chứng minh :

a) Nếu $0^0 < x < 45^0$ thì $\sin x < \cos x$

b) Nếu $45^0 < x < 90^0$ thì $\sin x > \cos x$.

2.11 Tính các giá trị lượng giác của góc x trong mỗi trường hợp sau :

a) $\tan x = 2,\ 0^0 < x < 90^0$ **b)** $\sin x = \dfrac{1}{3},\ 90^0 < x < 180^0$.

2.12 Cho $\cos x = -\dfrac{4}{5},\ 90^0 < x < 180^0$. Tìm giá trị của các biểu thức sau :

a) $P = \dfrac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$ **b)** $Q = \sin^3 x + \cos^3 x - \tan x$.

2.13 Cho $\sin x + \cos x = 1$. Tính các giá trị lượng giác của góc x.

2.14 Rút gọn các biểu thức :

a) $A = \dfrac{(1 - \tan x)^2}{4\tan^2 x} - \dfrac{1}{4\sin^2 x \cos^2 x}$

b) $B = \sqrt{(1 + \tan x)\cos^2 x + (1 + \cot x)\sin^2 x}$

c) $C = \tan 10^0 \tan 20^0 \tan 30^0 \tan 40^0 \tan 50^0 \ldots \tan 60^0 \tan 70^0 \tan 80^0$

d) $D = \cos 20^0 + \cos 40^0 + \cos 60^0 + \ldots + \cos 160^0 + \cos 180^0$.

2.15 Chứng minh các đẳng thức :

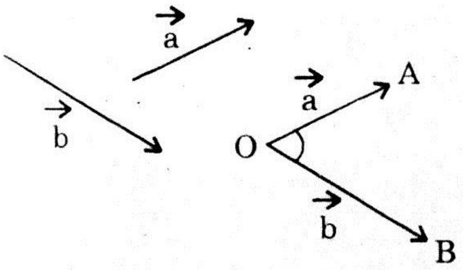
a) $\sin^4 x - \cos^4 x = 2\sin^2 x - 1$

b) $\cos^8 x + \sin^8 x = 1 + 2\sin^2 x\cos^4 x - 2\sin^2 x\cos^6 x - 4\sin^2 x\cos^2 x$

§2. Tích vô hướng của hai vectơ

1. Góc giữa hai vectơ

Cho hai vectơ khác $\vec{0}$ *là* $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$. *Từ điểm 0 tùy ý vẽ các vectơ* $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. *Khi đó* ***số đo của góc AOB gọi là số đo góc giữa hai vectơ*** $\vec{a}$ ***và*** $\vec{b}$. *Góc giữa hai vectơ* $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$, ***kí hiệu là*** $(\vec{a}; \vec{b})$.



Nếu $(\vec{a}; \vec{b}) = 90^0$ *ta nói* $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$ ***vuông góc*** *với nhau, kí hiệu là* $\vec{a} \perp \vec{b}$.

2. Tích vô hướng của hai vectơ

Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$, *kí hiệu* $\vec{a}.\vec{b}$ *được xác định như sau :* $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}; \vec{b})$

3. Các tính chất của tích vô hướng

Với mọi vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *và mọi số thực k ta có :*

1) $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$ *(tính chất giao hoán)*

2) $\vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

3) $(k\vec{a}).\vec{b} = \vec{a}(k\vec{b}) = k(\vec{a}.\vec{b})$

4) $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$ *(tính chất phân phối đối với phép cộng).*

4. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng

Cho hai vectơ $\vec{a} = (x; y)$ *và* $\vec{b} = (x'; y')$ *thì :*

1) $\vec{a}.\vec{b} = xx' + yy'$

2) $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

3) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{x'^2 + y'^2}}$

Hệ quả : $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0.$

CÁC VÍ DỤ GIẢI TOÁN

2.16 Ta gọi bình phương của vectơ $\vec{u}$, kí hiệu là $\vec{u}^2$ là tích vô hướng của $\vec{u}$ với chính nó : $\vec{u}^2 = \vec{u}.\vec{u} = |\vec{u}|^2$.

Chứng minh các hệ thức :

a) $(\vec{a}+\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a}.\vec{b}$

b) $(\vec{a}-\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a}.\vec{b}$ **c)** $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$

Hướng dẫn

a) Theo tính chất phân phối của tích vô hướng ta có :

$$(\vec{a}+\vec{b})^2 = (\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{a}(\vec{a}+\vec{b}) + \vec{b}(\vec{a}+\vec{b})$$

$$= \vec{a}.\vec{a} + \vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{a} + \vec{b}.\vec{b} = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{a}$$

Theo tính chất giao hoán của tích vô hướng $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$, do đó :

$$(\vec{a}+\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a}.\vec{b}$$

b, c) Chứng minh tương tự câu a).

2.17 Cho tam giác ABC có AB = 6, AC = 8, BC = 11.

a) Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

b) Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho AM = 2 và trên AC lấy điểm N sao cho AN = 4. Tính $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN}$.

Hướng dẫn

a) $$\overrightarrow{CB}^2 = (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{CB}^2) = \frac{1}{2}(6^2 + 8^2 - 11^2) = -\frac{21}{2}.$$

b) Ta có : $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

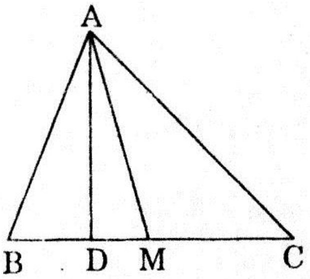
$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -\frac{21}{12}.$$

2.18 Cho tam giác ABC có AB = 2, $\widehat{BAC} = 60^0$, AC = 3.

a) Tính $|\overrightarrow{BC}|$ và $|\overrightarrow{AM}|$, AM là trung tuyến.

b) Gọi AD là đường phân giác của góc BAC. Tính $\cos\widehat{DAM}$.

Hướng dẫn



a) $|\overrightarrow{BC}|^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\,\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$

$$= 3^2 + 2^2 - 2.2.3.\cos 60^0 = 7$$

$BC = \sqrt{7}$

$$\overrightarrow{AM}^2 = \left[\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})\right]^2 = \frac{1}{4}\left[\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2\,\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right] = \frac{19}{4}$$

$$|\overrightarrow{AM}| = \frac{\sqrt{19}}{2}$$

b) Ta có : $\cos\widehat{DAM} = \dfrac{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AM}}{|\overrightarrow{AD}|.|\overrightarrow{AM}|}$ (1)

Theo tính chất của phân giác ta có : $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{2}{3}$

Suy ra $\overrightarrow{BD} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{2}{5}\overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AM} = \left(\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}\right).\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \frac{1}{5}\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{1}{2}.2^2 + \frac{1}{2}.2.3.\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\sqrt{7}.3.\cos C. - \frac{1}{5}\sqrt{7}.2\cos B$$

$$= \frac{7}{2} + \frac{1}{5}(3\sqrt{7}\cos C - 2\sqrt{7}\cos B) \qquad (2)$$

Tính cosB, cosC thì được : $\cos B = \dfrac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB.BC} = \dfrac{\sqrt{7}}{14}$,

$$\cos C = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC.BC} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

Thay cosB, cosC vào (2) thì được : $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AM} = \frac{9}{2}$.

- Tính $|\overrightarrow{AD}|$:

$$\overrightarrow{AD}^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD})^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BD}^2 + 2\,\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD} = 4 + \left(\frac{2}{5}\sqrt{7}\right)^2 - 4\frac{2\sqrt{7}}{5}.\frac{\sqrt{7}}{14}$$

$$= \frac{108}{25}.$$

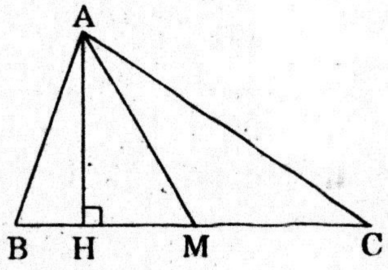
Thay các kết quả vừa có vào (1) thì được :

$$\cos\widehat{DAM} = \frac{9}{2} : \left(\sqrt{\frac{108}{25}}.\frac{\sqrt{19}}{2}\right) \approx 0,9934.$$

2.19 Cho tam giác ABC có đường cao AH, trung tuyến AM. Chứng minh rằng :

a) $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2}$ (1)

b) $|AB^2 - AC^2| = 2BC.MH$ (2).



Hướng dẫn

a) Ta có : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = AC^2 + AB^2 - 2\,\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$$

$$\Rightarrow \quad 2\,\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + BC^2 = AC^2 + AB^2 \qquad (3)$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA})(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA})$$

$$= \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) + MA^2 = \frac{BC^2}{4} + AM^2 \qquad (4)$$

Thay (4) vào (3) ta được (1).

b) $|AB^2 - AC^2| = |(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})| = 2|\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CB}|$ (5)

Theo tính chất của phép chiếu : $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MH}$

$$|\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CB}| = |2\,\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MA}| = 2MB.MH \qquad (6)$$

Thay (6) vào (5) ta được (2).

2.20 Cho tam giác ABC có trọng tâm G và nội tiếp trong đường tròn tâm O.

a) Chứng minh rằng với điểm M bất kì trong mặt phẳng ta có. :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 \qquad (1)$$

b) Tính tổng $GA^2 + GB^2 + GC^2$ theo các cạnh của tam giác ABC.

c) Xác định vị trí của M để tổng $MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất khi M di động trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Hướng dẫn

a) Với điểm M bất kì trong mặt phẳng ta có :

$$MA^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 = MG^2 + GA^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA}$$

$$MB^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 = MG^2 + GB^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB}$$

$$MC^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 = MG^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GC}$$

$$\Rightarrow \quad MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + \\ + 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})$$

G là trọng tâm ΔABC nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$. Từ đó suy ra (1).

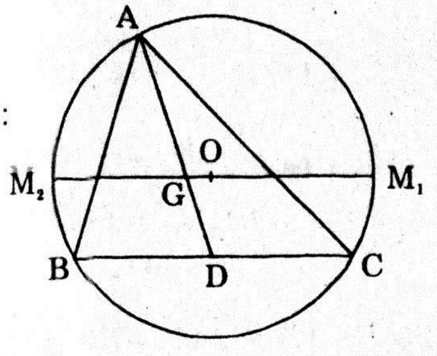
b) Khi M trùng với A thì (1) trở thành :

$$AB^2 + AC^2 = 4AG^2 + GB^2 + GC^2$$

Tương tự, khi M trùng với B, với C ta được :

$$AB^2 + BC^2 = 4BG^2 + GA^2 + GC^2$$

$$AC^2 + BC^2 = 4CG^2 + GA^2 + GB^2$$



Cộng các đẳng thức trên ta suy ra :

$$2(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 6(GA^2 + GB^2 + GC^2)$$

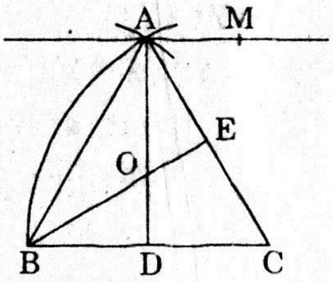
$$\Rightarrow \quad GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(AB^2 + AC^2 + BC^2)$$

c) Ta đặt : $S = MA^2 + MB^2 + MC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3MG^2$

Vì $GA^2 + GB^2 + GC^2$ không đổi nên S đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất phụ thuộc MG.

Từ tính chất của đường tròn, MG lớn nhất khi M ở vị trí M_1 với tâm O là điểm nằm trên đoạn M_1G và MG nhỏ nhất khi M ở vị trí M_2, lúc đó tâm O nằm trên đoạn M_2G kéo dài.

2.21 Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a. Tìm tập hợp (quĩ tích) những điểm M sao cho :



a) $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = MA^2 + \dfrac{a^2}{2}$ (1)

b) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA} = \dfrac{5a^2}{2}$ (2)

Hướng dẫn

a)
$$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = MA^2 + \frac{a^2}{2} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \quad (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) = MA^2 + \frac{a^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad MA^2 + \overrightarrow{MA}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = MA^2 + \frac{a^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{MA}.2\,\overrightarrow{AD} + AB.AC\cos A = \frac{a^2}{2} \quad (3)$$

Tam giác ABC đều, cạnh bằng a nên $AB.AC.\cos A = a^2.\cos 60^0 = \dfrac{a^2}{2}$

Do đó $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = MA^2 + \dfrac{a^2}{2} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AD} = 0,$

trong đó AD là trung tuyến của ΔABC. Điều này chứng tỏ tập hợp (quĩ tích) các điểm M thỏa mãn (1) là đường thẳng đi qua A vuông góc với AD.

b) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ta có :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}$$

$$= 3\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{MO}$$

$$(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 + 2(\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA})$$

$$= 9MO^2$$

$$\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC})^2$$

$$= 3MO^2 + OA^2 + OB^2 + OC^2 + 2\,\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

$$= 3MO^2 + a^2 \quad (\text{Vì } OA = OB = OC = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{\sqrt{3}})$$

Do đó :

$$(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})^2 = 3MO^2 + a^2 + 2(\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA})$$

$$= 9MO^2$$

Thay $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA} = \frac{5a^2}{2}$ ta được :

$$3MO^2 + a^2 + 5a^2 = 9MO^2 \quad \Leftrightarrow \quad MO^2 = a^2 \qquad (4)$$

O cố định nên (4) cho thấy tập hợp (quỹ tích) các điểm M thỏa mãn (2) là đường tròn tâm O bán kính a.

2.22 Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp (quỹ tích) các điểm M sao cho :

a) $MA^2 + MB^2 + MC^2 = AB^2 + AC^2$ (1)

b) $2MA^2 = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}$ (2)

Hướng dẫn

a) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC ta có :

$$VT\,(1) = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2$$

$$= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\,\overrightarrow{MG}\underbrace{(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})}_{\vec{0}}$$

$$= AB^2 + AC^2 \quad (3)$$

Ta lại có : $GB^2 + GC^2 = (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB})^2 + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC})^2$

$$= 2GA^2 + AB^2 + AC^2 + 2\,\overrightarrow{GA}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

$$= 2GA^2 + AB^2 + AC^2 - 2\,\overrightarrow{AG}.3\,\overrightarrow{AG}$$

$$= AB^2 + AC^2 - 4GA^2$$

Do đó : (1) $\Leftrightarrow$ $3MG^2 - 3GA^2 = 0$ $\Leftrightarrow$ $GM = GA$

Vậy tập hợp (quỹ tích) cần tìm là đường tròn tâm G bán kính bằng GA.

b) (2) $\Leftrightarrow$ $2\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = 0$

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) + \overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}) = 0$

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}) = 0$

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{MA}.2\overrightarrow{DA} = 0$ (AD là trung tuyến của ΔABC)

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{DA} = 0$

Suy ra tập hợp (quỹ tích) M là đường thẳng qua A và vuông góc với trung tuyến AD.

2.23 Cho hai vectơ $\vec{a} = (-2; 1)$, $\vec{b}(1; -1)$.

a) Tính tích vô hướng $\vec{a}.\vec{b}$ và cosin của góc $(\vec{a}; \vec{b})$.

b) Xác định toạ độ của vectơ $\vec{c}$, biết $\vec{a}.\vec{c} = -1$, $\vec{b}.\vec{c} = -1$.

Hướng dẫn

a) $\vec{a}.\vec{b} = x_ax_b + y_ay_b = -2.1 + 1(-1) = -3$

$$\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \frac{-3}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = -\frac{3}{\sqrt{10}}$$

b) Đặt $\vec{c} = (x; y)$ ta có :

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a}.\vec{c} = -2x + 1y = -1 \\ \vec{b}.\vec{c} = 1x + (-1)y = -1 \end{array}\right. \Rightarrow \vec{c} = (2; 3).$$

2.24 Cho 5 điểm A(0; –1), B(2; 3), $C\left(\frac{1}{2}; 0\right)$, E(1; 6), F(–3; –4).

a) Chứng tỏ rằng A, B, C thẳng hàng.

b) Tìm điểm M trên AB sao cho vectơ $\overrightarrow{EM} + \overrightarrow{FM}$ có độ dài nhỏ nhất.

Hướng dẫn

a) Ta có : $\overrightarrow{AB} = (2-0;\ 3+1) = (2;\ 4)$

$$\overrightarrow{AC} = \left(\frac{1}{2}-0;\ 0+1\right) = \left(\frac{1}{2};\ 1\right)$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} = 4\,\overrightarrow{AC}.$$ Vậy A, B, C thẳng hàng.

b) Giả sử M(x; y). $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng phương, nghĩa là ta có :

$$\frac{x-0}{2-0} = \frac{y+1}{3+1} \quad \Rightarrow \quad y = 2x-1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M(x;\ 2x-1)}.$$

Gọi I là trung điểm của EF thì $I(x_I;\ y_I)$ với :

$$x_I = \frac{x_E + x_F}{2} = \frac{1-3}{2} = -1, \qquad y_I = \frac{y_E + y_F}{2} = \frac{6-4}{2} = 1.$$

Vậy I(−1; 1).

Vì $|\overrightarrow{EM} + \overrightarrow{FM}| = |2\,\overrightarrow{IM}|$ nên $|\overrightarrow{EM} + \overrightarrow{FM}|$ nhỏ nhất khi IM nhỏ nhất hay M là hình chiếu vuông góc của I trên AB, tương đương :

$$\overrightarrow{IM} \perp \overrightarrow{AB} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2(x+1) + 4(2x-1-1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{3}{5}.$$

Vậy $M\left(\frac{3}{5};\ \frac{1}{5}\right)$.

BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài tập về tính toán tích vô hướng, độ dài, góc

2.25 Cho tam giác ABC có AB = 5, BC = 7, CA = 8.

a) Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$, cosin của các góc A, B, C.

b) Tìm độ dài đường cao AH.

2.26 Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a, đường cao AH.

a) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HC}$

b) Tính $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})(2\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$.

2.27 Cho hình thang vuông ABCD, đường cao AB = 2, đáy lớn BC = 3, đáy nhỏ AD = 2.

a) Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$.

b) Gọi trung điểm của CD là I. Tính $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BD}$.

2.28 Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ với $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 4$. Tính tích vô hướng $A = (\vec{a} - 3\vec{b})(2\vec{a} + \vec{b})$.

2.29 Cho tam giác ABC, biết A(1; 2), B(−2; 6), C(4; 2).

a) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ và cosin của góc A.

b) Tìm tọa độ của điểm H là chân đường cao AH của tam giác.

2.30 Cho tam giác ABC, biết hai đỉnh A(2; 6), B(−3; −4) và trọng tâm $G\left(\frac{4}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

a) Chứng minh tam giác ABC vuông.

b) Tìm tọa độ điểm D chân đường phân giác trong của góc B.

c) Xác định tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Bài tập sử dụng tích vô hướng để chứng minh

2.31 Cho tam giác ABC đều nội tiếp đường tròn tâm O, điểm M tùy ý trên đường tròn. Chứng minh rằng đại lượng $MA^2 + MB^2 + MC^2$ không đổi khi M di động trên đường tròn.

2.32 Cho tam giác ABC có trực tâm H. Trung điểm của BC là M. Chứng minh :

a) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MH} = \frac{1}{4}BC^2$ **b)** $MH^2 + MA^2 = AH^2 + \frac{1}{2}BC^2$.

2.33 Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của BC, CA, AB. Chứng minh : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BN}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CP}.\overrightarrow{AB} = 0$.

2.34 Cho tam giác ABC với trọng tâm G và điểm M trên mặt phẳng. Chứng minh :

$T = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{GA}$ có giá trị không đổi khi M di động.

2.35 Cho tam giác ABCD tâm O và điểm M trên mặt phẳng. Chứng minh rằng :

a) $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$ **b)** $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}$

c) $MA^2 + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MO}$.

2.36 Chứng minh rằng trong một tam giác thì ba đường cao đồng quy.

2.37 Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O và điểm H thỏa mãn hệ thức : $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

a) Chứng minh rằng H là trực tâm của tam giác ABC

b) Gọi M là trung điểm BC. Tìm hệ thức giữa các cạnh của tam giác ABC để $OH \perp AM$.

2.38 Cho tam giác ABC. Về phía ngoài tam giác ta dựng hai hình vuông ABDE và ACFG. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng EG. Chứng minh $AM \perp BC$.

2.39 Cho tứ giác ABCD biết $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DA} = 0$.

Chứng minh ABCD là hình bình hành.

Bài tập về tìm tập hợp (quỹ tích) điểm

2.40 Cho hai điểm phân biệt, cố định A và B. Tìm tập hợp (quỹ tích) các điểm M thỏa mãn :

a) $2MA^2 + MB^2 = k$ (k là hằng số dương cho trước)

b) $MA^2 - 3MB^2 = k$.

2.41 Cho tam giác ABC.

a) Tìm tập hợp (quỹ tích) các điểm M thỏa mãn :

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k$ (k là số thực cho trước)

b) Tìm tập hợp (quỹ tích) các điểm M thỏa mãn :

$$MA^2 + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0.$$

2.42 Cho hình vuông ABCD cạnh a. Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn :

a) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD} = a^2$ **b)** $MA^2 - MB^2 + MC^2 = a^2$.

2.43 Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn :

a) $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MG}=AB^2$ **b)** $(2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB})=0$.

2.44 Cho tam giác vuông cân ABC, cạnh huyền AB = a. Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn : $MA^2+MB^2+MC^2=3a^2$.

§3. Hệ thức lượng trong tam giác

1. Định lí Cosin trong tam giác

Trong tam giác ABC, đặt BC = a, CA = b, AB = c ta luôn có :

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

2. Định lí Sin trong tam giác

Với mọi tam giác ABC, ta luôn có :

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

Trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

3. Công thức độ dài trung tuyến của tam giác

Kí hiệu m_a, m_b, m_c lần lượt là độ dài các trung tuyến ứng với các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC, ta có các công thức trung tuyến sau đây :

$$m_a^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}$$

$$m_b^2=\frac{c^2+a^2}{2}-\frac{b^2}{4}$$

$$m_c^2=\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{c^2}{4}$$

4. Diện tích tam giác

Kí hiệu h_a, h_b, h_c lần lượt là đường cao của tam giác ABC ứng với *các cạnh a, b, c; R, r là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác;* $p = \frac{a+b+c}{2}$ *là nửa chu vi của tam giác thì diện tích S của tam giác được tính theo các công thức sau :*

$$S = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}b.h_b = \frac{1}{2}c.h_c$$

$$S = \frac{1}{2}ab.\sin C = \frac{1}{2}ac.\sin B = \frac{1}{2}bc.\sin A$$

$$S = \frac{abc}{4R}$$

$$S = pr$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$ *(công thức Hê-rông)*

5. Giải tam giác

Giải tam giác là tính các cạnh, các góc của một tam giác dựa trên một số điều kiện cho trước.

CÁC VÍ DỤ GIẢI TOÁN

2.45 Cho tam giác vuông ABC vuông tại A có đường cao AH. Sử dụng định lí Cosin chứng minh các hệ thức lượng trong tam giác vuông :

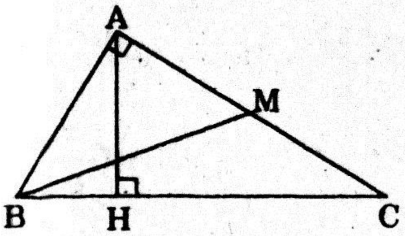
$BC^2 = AB^2 + AC^2$ (hay $a^2 = b^2 + c^2$)

$AB^2 = BC.BH$ (hay $c^2 = ac'$)

$AC^2 = BC.CH$ (hay $b^2 = ab'$)

Áp dụng : Tính các cạnh AB, AC của tam giác ABC vuông tại A có cạnh $BC = \frac{2k\sqrt{3}}{3}$, trung tuyến BM = k (k là số thực dương).

Hướng dẫn



- Theo định lí Cosin trong tam giác :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A$$

$\widehat{A} = 90^0$ nên cosA = 0 nên :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

- Vẫn theo định lí Cosin thì :

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC.AC.\cos C \quad (*)$$

Thay BC = BH + CH, $\cos C = \frac{CH}{AC} = \frac{AC}{BC}$ ta được :

$$AB^2 = (BH + CH)^2 + AC^2 - 2(BH + CH).AC.\frac{CH}{AC}$$

$$= BH^2 - CH^2 + AC^2 = (BH + CH)(BH - CH) + AC^2$$

$$= BC.BH + AC^2 - BC.CH$$

Do $\cos C = \frac{CH}{AC} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow BC.CH = AC^2$ nên $AB^2 = BC.BH$.

Chứng minh tương tự ta được : $AC^2 = BC.CH$.

Áp dụng :

Trong tam giác vuông ABM ta có : $AB^2 = BM^2 - AM^2$

Trong tam giác vuông ABC ta có : $AB^2 = BC^2 - AC^2$

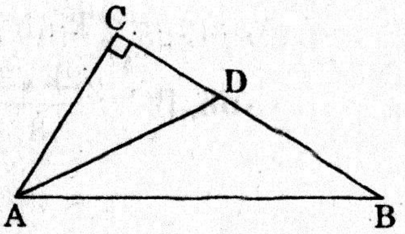
Suy ra : $BM^2 - AM^2 = BC^2 - AC^2 \Leftrightarrow k^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2 = \left(\frac{2k\sqrt{3}}{3}\right)^2 - AC^2$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}AC^2 = \frac{4k^2}{3} - k^2 \Rightarrow AC = \frac{2k}{3}$$

$$AB^2 = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \frac{2k\sqrt{2}}{3}.$$

2.46 Cho tam giác vuông ABC vuông tại C, AD là đường phân giác trong. Tính các đoạn thẳng AB, BC, AC theo BD = x và CD = y.

Hướng dẫn



Theo tính chất của phân giác :

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{BD} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{AC^2}{AB^2} = \frac{y^2}{x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{AC^2}{AB^2 - AC^2} = \frac{y^2}{x^2 - y^2} \Rightarrow \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{y^2}{x^2 - y^2}$$

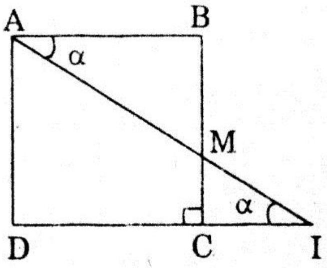
$$AC = BC\sqrt{\frac{y^2}{x^2 - y^2}} = (x + y)\sqrt{\frac{y^2}{(x + y)(x - y)}}$$

$$\Rightarrow AC = y\sqrt{\frac{x + y}{x - y}}, \quad AB = x\sqrt{\frac{x + y}{x - y}}$$

2.47 Cho hình vuông ABCD. Đường thẳng qua A cắt cạnh BC tại M và cạnh CD kéo dài tại I. Chứng minh : $\frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AI^2}$.

Hướng dẫn

Đặt $\alpha = \widehat{MAB}$ ta có :



$$\frac{AB}{AM} = \cos\alpha, \qquad \frac{AD}{AI} = \sin\alpha$$

$$\frac{1}{AM} = \frac{\cos\alpha}{AB}, \qquad \frac{1}{AI} = \frac{\sin\alpha}{AD}$$

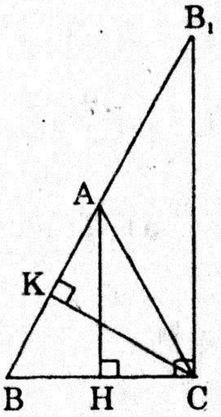
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{AB^2} = \frac{1}{AB^2}.$$

2.48 Cho tam giác cân ABC có góc ở đỉnh A là góc nhọn, với AH, CK là các đường cao. Chứng minh rằng :

a) $\frac{1}{CK^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{4AH^2}$ **b)** $BC^2 = 2BK.BA$

c) $\frac{AK}{BK} = 2\left(\frac{AB}{BC}\right)^2 - 1$.

Hướng dẫn



a) Lấy B_1 đối xứng với B qua A. Dễ thấy AH là đường trung bình của tam giác BCB_1.

$$CB_1 = 2AH, \qquad BB_1 = 2AB.$$

Trong tam giác vuông BCB_1, đường cao CK thỏa mãn hệ thức :

$$\frac{1}{CK^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{CB_1^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{4AH^2}.$$

b) $BC^2 = BB_1.BK = 2BA.BK$

c) Từ b) suy ra :

$$\frac{2AB}{BC^2} = \frac{1}{BK} \quad \Rightarrow \quad \frac{2AB^2}{BC^2} = \frac{AB}{BK} = \frac{AK + BK}{BK} = 1 + \frac{AK}{BK}$$

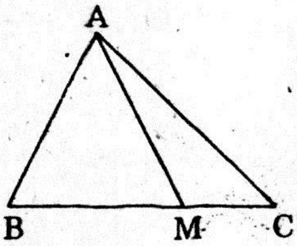
$$\Rightarrow \quad \frac{AK}{BK} = \frac{2AB^2}{BC^2} - 1.$$

2.49 Cho tam giác ABC có AB = 8, AC = 9, BC = 10.

a) Tìm số đo các góc của tam giác

b) Một điểm M nằm trên cạnh BC sao cho BM = 7. Tính độ dài đoạn thẳng AM.

Hướng dẫn



a) $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC} = \frac{8^2 + 9^2 - 10^2}{2.8.9} = \frac{5}{16}$

$A \approx 71^0 47'$

$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB.BC} = \frac{8^2 + 10^2 - 9^2}{2.8.10} = \frac{83}{160}$

$B \approx 58^0 45'$

$C = 180^0 - (A + B) = 49^0 28'$

b) $AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2AB.BM.\cos B = 8^2 + 7^2 - 2.8.7.\frac{83}{160} = \frac{549}{10}$

$AM = \sqrt{\frac{549}{10}} \approx 7,4.$

2.50 Cho tam giác ABC. Đặt BC = a, AC = b, AB = c; h_a là đường cao ứng với đỉnh A; R là bán kính đường tròn ngoại tiếp. Chứng minh các hệ thức :

a) $a = b.\cos C + c.\cos B$ **b)** $h_a = 2R.\sin B.\sin C$.

Hướng dẫn

a) Theo định lí Cosin trong tam giác :

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \Rightarrow c.\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$$

Tương tự ta có : $b.\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$

Suy ra : $b.\cos C + c.\cos B = \frac{a^2 + b^2 - c^2 + a^2 + c^2 - b^2}{2a} = a.$

b) Theo định lí Sin trong tam giác ta có :

$$a = 2R.\sin A, \quad b = 2R.\sin B, \quad c = 2R.\sin C$$

Mặt khác theo công thức diện tích tam giác ta có :

$$S = \frac{1}{2}b.c.\sin A = \frac{1}{2}.a.h_a$$

Suy ra : $2R.\sin B.2R.\sin C.\sin A = 2R\sin A.h_a$

$h_a = 2R.\sin B.\sin C.$

2.51 Cho tam giác ABC có $AB = 1 + 6\sqrt{2}$, $A = 60^0$, bán kính đường tròn ngoại tiếp R = 5. Tính độ dài các cạnh AC, BC và trung tuyến AM của tam giác.

Hướng dẫn

Theo định lí sin trong tam giác : $BC = a = 2R.\sin A = 5\sqrt{3}$

Đặt AC = b, AB = c, ta có :

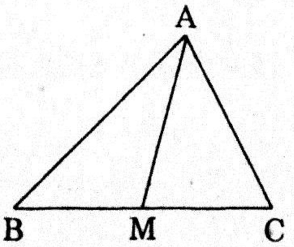
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b.c.\cos A$$

$$\Leftrightarrow \quad b^2 - (1 + 6\sqrt{2})b + (1 + 6\sqrt{2})^2 - (5\sqrt{3})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad b = AC = \frac{1 + 6\sqrt{2} \pm \sqrt{(1 + 6\sqrt{2})^2 - 4(12\sqrt{2} - 2)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad b = \frac{1 + 6\sqrt{2} \pm (6\sqrt{2} - 3)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad b = 6\sqrt{2} - 1 \quad \text{hoặc} \quad b = 2$$



- Với $b = 6\sqrt{2} - 1$ thì :

$$AM^2 = \frac{1}{2}\left[b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[(6\sqrt{2} - 1)^2 + (6\sqrt{2} + 1)^2 - \frac{(5\sqrt{3})^2}{2}\right] = \frac{217}{4}$$

$$AM = \frac{\sqrt{217}}{2}$$

- Với b = 2 thì : $AM^2 = \frac{1}{2}\left[2^2 + (6\sqrt{2} + 1)^2 - \frac{(5\sqrt{3})^2}{3}\right] = \frac{79 + 24\sqrt{2}}{4}$

$$AM = \frac{\sqrt{79 + 24\sqrt{2}}}{2}.$$

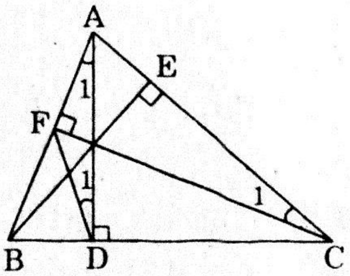
2.52 Cho tam giác ABC độ dài các cạnh BC = a, AB = c, AC = b, bán kính đường tròn ngoại tiếp là R. Các đường cao của tam giác là AD, BE và CF. Chứng minh các hệ thức :

a) $EF + FD + DE = a.\cos A + b.\cos B + c.\cos C$

b) $a.\sin A + b.\sin B + c.\sin C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2R}$

c) $\cot A + \cot B + \cot C = \frac{R(a^2 + b^2 + c^2)}{abc}$.

Hướng dẫn



a) Áp dụng định lí Sin trong tam giác AFD ta có :

$$\frac{FD}{\sin A_1} = \frac{AF}{\sin D_1}$$

Trong tam giác AFC ta có : $AF = AC.\sin C_1$

Dễ thấy $\widehat{C}_1 = \widehat{D}_1$ (tứ giác ACDF nội tiếp) nên :

$$\frac{FD}{\sin A_1} = \frac{AC.\sin C_1}{\sin C_1} = AC \quad \Rightarrow \quad FD = AC.\sin A_1$$

Vì A_1 và B là hai góc phụ nhau nên $\quad FD = AC.\cos B = b.\cos B.$

Chứng minh tương tự ta có : $ED = c.\cos C$, $EF = a.\cos A$.

Vậy : $\quad EF + FD + DE = a.\cos A + b.\cos B + c.\cos C.$

b) Theo định lí Sin trong tam giác ta có : $\dfrac{a}{\sin A} = 2R \quad \Rightarrow \quad a\sin A = \dfrac{a^2}{2R}$

Tương tự $\quad b\sin B = \dfrac{b^2}{2R}, \qquad c\sin C = \dfrac{c^2}{2R}.\quad$ Suy ra ĐPCM.

c) Ta có : $\quad \sin A = \dfrac{a}{2R}, \qquad \cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$$\Rightarrow \quad \cot A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} : \frac{a}{2R} = \frac{R(b^2 + c^2 - a^2)}{abc}$$

Làm tương tự ta được :

$$\cot A + \cot B + \cot C = \frac{R(b^2 + c^2 - a^2 + a^2 + c^2 - b^2 + a^2 + b^2 - c^2)}{abc}$$

$$= \frac{R(a^2 + b^2 + c^2)}{abc}.$$

2.53 Chứng minh rằng nếu tam giác ABC thỏa mãn các điều kiện

$$\begin{cases} \dfrac{b^3 + c^3 - a^3}{b + c - a} = a^2 \\ a = 2b\cos C \end{cases} \quad \text{thì ABC là tam giác đều.}$$

Hướng dẫn

$$a = 2b.\cos C \quad \Rightarrow \quad a = 2b.\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \quad \Rightarrow \quad a^2 = a^2 + b^2 - c^2$$

$$\Rightarrow \quad b = c. \quad \text{Tam giác ABC cân đỉnh A.}$$

Mặt khác : $\dfrac{b^3 + c^3 - a^3}{b + c - a} = a^2 \Rightarrow b^3 + c^3 - a^3 = a^2(b + c) - a^3$

$$\Rightarrow (b + c)(b^2 - ab + c^2) = a^2(b + c)$$

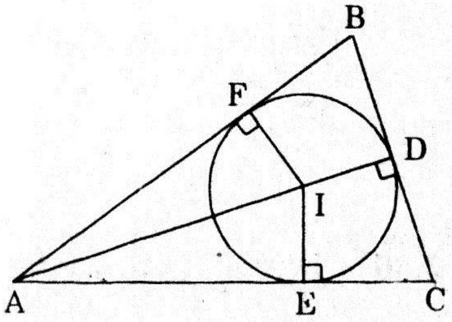
$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2ab.\frac{1}{2} \Rightarrow \cos A = \frac{1}{2} \Rightarrow A = 60^0$$

Vậy tam giác ABC đều.

2.54 Cho tam giác ABC có chu vi 2p, bán kính đường tròn nội tiếp là r. Chứng minh :

a) $(b + c)\cos A + (c + a)\cos B + (a + c)\cos C = 2p$

b) $r = \dfrac{b\sin A}{2\left(1 + \sin\dfrac{A}{2}\right)}$ nếu $AB = AC = b$.



Hướng dẫn

a) Theo kết quả bài 2.50 ta được :

$$a = b.\cos C + c.\cos B$$

$$b = c.\cos A + a.\cos C$$

$$c = a.\cos B + b.\cos A$$

$$\Rightarrow 2p = a + b + c = (b + c)\cos A + (c + a)\cos B + (a + b)\cos C$$

b) Tam giác ABC cân đỉnh A nên tâm I của đường tròn nội tiếp nằm trên đường trung trực của cạnh BC.

$$BC = BD + DC = 2b\sin\frac{A}{2}$$

$$2p = 2b + a = 2b + 2b\sin\frac{A}{2} = 2b\left(1 + \sin\frac{A}{2}\right)$$

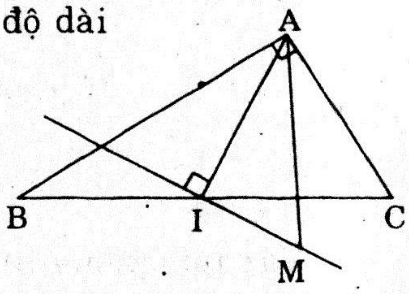
Mặt khác theo công thức diện tích tam giác ta có :

$$S = pr = \frac{1}{2}b^2.\sin A \Rightarrow r = \frac{\frac{1}{2}b^2\sin A}{b\left(1 + \sin\frac{A}{2}\right)} = \frac{b\sin A}{2\left(1 + \sin\frac{A}{2}\right)}$$

2.55 Cho tam giác vuông ABC. Tìm tập hợp (quỹ tích) các điểm M thỏa mãn :

a) $MB^2 + MC^2 = 2MA^2$ **b)** $MB^2 + MC^2 = 2BC^2$.

Hướng dẫn



a) Gọi I là trung điểm của BD, theo công thức độ dài trung tuyến, ta có : $MB^2 + MC^2 = 2MA^2$

$$\Leftrightarrow \quad 2MI^2 + \frac{BC^2}{2} = 2MA^2$$

$$\Leftrightarrow \quad MA^2 - MI^2 = \frac{BC^2}{4} \qquad (1)$$

Tập hợp (quỹ tích) các điểm M là đường thẳng đi qua I và vuông góc với AI (vì $MA^2 - MI^2 = AI^2 = \left(\frac{BC}{2}\right)^2 = \frac{BC^2}{4}$)

b) $$MB^2 + MC^2 = 2MI^2 + \frac{BC^2}{2} = 2BC^2 \quad \Rightarrow \quad MI^2 = \frac{3}{4}BC^2$$

Tập hợp (quỹ tích) các điểm M là đường tròn tâm I bán kính bằng $BC.\frac{\sqrt{3}}{2}$.

BÀI TẬP TỰ GIẢI

2.56 Cho tam giác vuông ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết BH = 1, $AC = 2\sqrt{5}$. Tính độ dài các đoạn thẳng BC, AB và AH.

2.57 Cho tam giác ABC vuông tại A có cạnh AB = 3, đường phân giác trong $AD = 2\sqrt{2}$. Tính các cạnh còn lại của tam giác.

2.58 Cho tam giác vuông ABC vuông tại A có $\hat{C} = 30^0$, AB = 1. Kéo dài CB một đoạn BD = BC. Tính đường cao BH của tam giác ABD.

2.59 Cho tam giác ABC có diện tích $S = \frac{1}{4}(a + b - c)(a - b + c)$. Chứng minh tam giác ABC vuông.

2.60 Cho tam giác ABC vuông tại A, các đường trung tuyến AM và BN vuông góc với nhau, cạnh AB = a. Tính các cạnh AC và BC.

2.61 Cho tam giác ABC vuông ở A, AB = 3, AC = 4, AH là đường cao. Gọi I là điểm thuộc cạnh AB sao cho AI = 2BI. Các đường thẳng CI và AH cắt nhau tại E. Tính độ dài đoạn CE.

2.62 Cho tam giác ABC có AC = 7, AB = 5, $\cos A = \frac{3}{5}$. Tính đường cao AH và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác.

2.63 Cho tam giác ABC có BC = 7, AC = 8, AB = 6. Tính đường cao và trung tuyến kẻ từ đỉnh A.

2.64 Cho tam giác ABC có $A = 120^0$, $B = 45^0$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp $R = 2$. Tính các cạnh và các đường cao của tam giác.

2.65 Cho tam giác ABC có các cạnh $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Hãy tính tổng các bình phương các trung tuyến của tam giác ABC theo a, b, c.

2.66 Cho tam giác ABC với $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Các đường cao kẻ từ A, B, C theo thứ tự là h_a, h_b, h_c. Chứng minh :

a) Nếu $b + c = 2a$ thì $\dfrac{2}{h_a} = \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}$

b) Nếu $bc = a^2$ thì $\sin B.\sin C = \sin^2 A$ và $h_b.h_c = h_a^2$.

2.67 Cho tam giác ABC có các đường phân giác trong ứng với các góc A, B, C theo thứ tự là l_a, l_b, l_c. Chứng minh :

$$l_a = \frac{2bc.\cos\frac{A}{2}}{b+c}, \quad l_b = \frac{2ac.\cos\frac{B}{2}}{c+a}, \quad l_c = \frac{2ab.\cos\frac{C}{2}}{a+b}$$

Áp dụng : Cho tam giác ABC, biết $a = 2\sqrt{3}$, $b = 2\sqrt{2}$, $c = \sqrt{6} + \sqrt{2}$. Tính độ dài đường phân giác trong của góc A.

2.68 Tam giác ABC có đường tròn nội tiếp bán kính r, đường tròn ngoại tiếp bán kính R. Chứng minh :

a) $a = r\left(\cot\dfrac{B}{2} + \cot\dfrac{C}{2}\right)$ **b)** $S = 2R^2\sin A.\sin B.\sin C$.

2.69 Cho tứ giác lồi ABCD. Gọi I, K lần lượt là trung điểm các đường chéo AC và BD. Chứng minh rằng :

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4IK^2.$$

Từ đó suy ra điều kiện cần và đủ để ABCD là hình bình hành.

2.70 Cho hai điểm cố định A, B với $AB = a > 0$. Tìm quỹ tích (tập hợp) các điểm M thỏa mãn hệ thức : $MA^2 + MB^2 = 2a^2$.

2.71 Cho tam giác vuông ABC vuông tại A. Tìm tập hợp (quỹ tích) các điểm M sao cho : $MB^2 + MC^2 - 2MA^2 = BC^2$.

2.72 Giải tam giác ABC, biết :

a) $b = 4{,}5$; $\hat{A} = 30^0$; $\hat{B} = 75^0$ **b)** $c = 35$; $\hat{A} = 40^0$; $\hat{C} = 120^0$.

2.73 Giải tam giác ABC, biết :

a) $a = 7$, $b = 23$, $\hat{C} = 130^0$ **b)** $a = 4$, $b = 5$, $c = 7$.

VẤN ĐỀ THAM KHẢO

Hệ thức lượng trong đường tròn

1. Phương tích của một điểm đối với một đường tròn

Cho đường tròn (O; R) và điểm M cố định. Một đường thẳng thay đổi nhưng luôn đi qua M và cắt đường tròn tại A và B thì tích vô hướng $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ *là đại lượng không đổi bằng* $MO^2 - R^2$, *được gọi là* ***phương tích của điểm M đối với đường tròn (O; R)***, *kí hiệu :*

$$\mathscr{P}_{M/(O)} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = d^2 - R^2 \qquad (d = OM)$$

2. Các hệ quả

a) *Nếu qua điểm M kẻ hai đường thẳng cắt đường tròn (O; R) theo thứ tự tại A, B và C, D thì :*

$$MA.MB = MC.MD$$

b) *Bốn điểm A, B, C, D nằm trên một đường tròn nếu các đường thẳng AB và CD cắt nhau tại điểm M và thỏa mãn điều kiện :*

$$\overline{MA}.\overline{MB} = \overline{MC}.\overline{MD}$$

c) *Nếu một đường thẳng qua điểm M cắt đường tròn (O; R) tại A và B và một đường thẳng qua M tiếp xúc với đường tròn ấy tại điểm T thì :*

$$MT^2 = MA.MB$$

d) *Ba điểm A, B, C không thẳng hàng, điểm M nằm trên đường thẳng BC thỏa mãn hệ thức :*

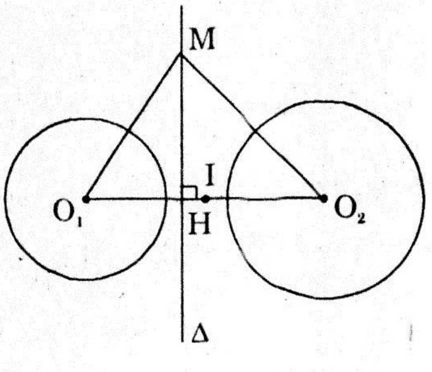
$$MA^2 = \overline{MB}.\overline{MC}$$

thì MA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại A.

3. Trục đẳng phương

Cho hai đường tròn không đồng tâm $(O_1; R_1)$ *và* $(O_2; R_2)$. *Tập hợp (quỹ tích) những điểm M có cùng phương tích với hai đường tròn đã cho :*

$$MO_1^2 - R_1^2 = MO_2^2 - R_2^2$$



là đường thẳng Δ vuông góc với O_1O_2, gọi là trục đẳng phương của $(O_1; R_1)$ và $(O_2; R_2)$.

Gọi I là trung điểm của O_1O_2, H là giao điểm của Δ với O_1O_2 thì :

$$\overline{IH} = \frac{R_1^2 - R_2^2}{2\overline{O_1O_2}}$$

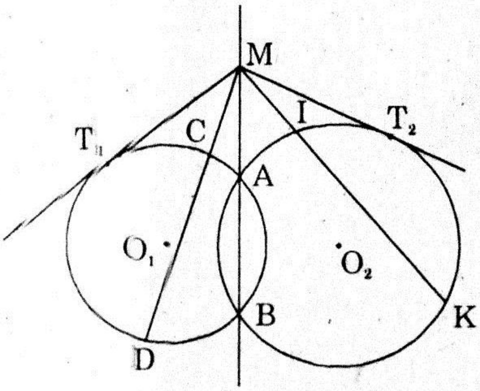
CÁC VÍ DỤ GIẢI TOÁN

2.74 Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại A và B. Trên đường thẳng AB lấy điểm M nằm ngoài đoạn thẳng AB. Kẻ tiếp tuyến MT_1 với đường tròn (O_1) và tiếp tuyến MT_2 với đường tròn (O_2).

a) Chứng minh $MT_1 = MT_2$.

b) Vẽ cát tuyến MCD với đường tròn (O_1) và cát tuyến MIK với đường tròn (O_2). Chứng minh rằng bốn điểm C, D, I, K nằm trên một đường tròn.

Hướng dẫn



a) $$\mathscr{P}_{M(O_1)} = \overline{MA}.\overline{MB} = MT_1^2$$

$$\mathscr{P}_{M(O_2)} = \overline{MA}.\overline{MB} = MT_2^2$$

$$\Rightarrow \quad MT_1^2 = MT_2^2 \quad \Rightarrow \quad MT_1 = MT_2$$

b) Với (O_1) ta có : $\overline{MC}.\overline{MD} = \overline{MA}.\overline{MB}$

Với (O_2) ta có : $\overline{MI}.\overline{MK} = \overline{MA}.\overline{MB}$

$$\Rightarrow \quad \overline{MC}.\overline{MD} = \overline{MI}.\overline{MK}$$

⇒ C, D, I, K nằm trên một đường tròn.

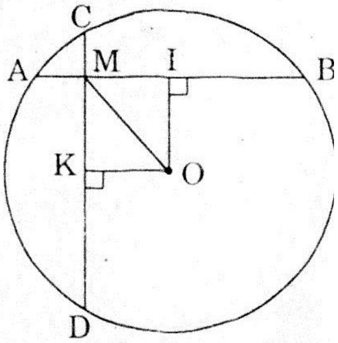
2.75 Cho đường tròn (O; R) và điểm M cố định bên trong đường tròn. Qua M kẻ hai cát tuyến BMA và CMD thay đổi nhưng luôn vuông góc với nhau.

a) Chứng minh $AB^2 + CD^2$ là đại lượng không đổi.

b) Chứng minh $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ là đại lượng không phụ thuộc vào vị trí M trong đường tròn.

Hướng dẫn

a) Kẻ OI ⊥ AB, OK ⊥ CD; I, K theo thứ tự là trung điểm của AB và CD.



Ta có :

$$AB^2 = (2IB)^2 = 4(OB^2 - OI^2)$$
$$= 4(R^2 - OI^2)$$

Tương tự, ta có :

$$CD^2 = 4(R^2 - OK^2)$$
$$\Rightarrow \quad AB^2 + CD^2 = 4[2R^2 - (OI^2 + OK^2)]$$
$$= 4[2R^2 - OM^2] \qquad (1)$$

Do R, OM không đổi nên từ (1) suy ra $AB^2 + CD^2$ không đổi.

b) Ta có :

$$MA^2 + MB^2 = (MA + MB)^2 - 2MA.MB = AB^2 - 2\mathscr{P}_{M/(O)}$$
$$= AB^2 - 2(R^2 - OM^2)$$
$$MC^2 + MD^2 = (MC + MD)^2 - 2MC.MD = CD^2 - 2\mathscr{P}_{M/(O)}$$
$$= CD^2 - 2(R^2 - OM^2)$$
$$\Rightarrow \quad MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = AB^2 + CD^2 - 4(R^2 - OM^2)$$

Theo kết quả câu a) ta được :

$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4R^2$ không phụ thuộc vị trí của M.

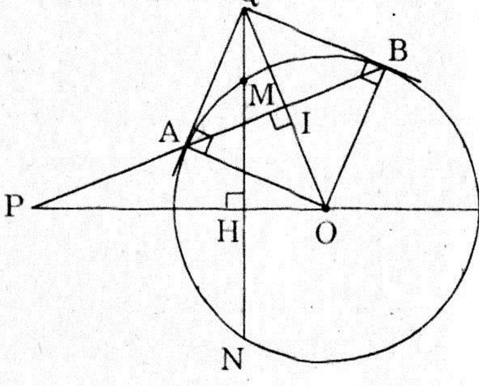
2.76 Cho đường tròn (O) và điểm P ở ngoài đường tròn. Một đường thẳng thay đổi đi qua P cắt đường tròn tại A và B. Các tiếp tuyến với đường tròn (O) tại A và B cắt nhau tại Q. Gọi H là hình chiếu vuông góc của Q trên đường thẳng PO.

a) Chứng minh năm điểm O, A, B, H, Q nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh điểm H cố định khi đường thẳng PAB thay đổi.

c) Tìm quỹ tích các điểm Q.

Hướng dẫn



a) Ta có : $\widehat{OHQ} = \widehat{OAQ} = \widehat{OBQ} = 90^0$ nên O, A, B, H, Q nằm trên đường tròn đường kính OQ.

b) Do O, H, A, B nằm trên một đường tròn nên :

$$\overline{PH}.\overline{PO} = \overline{PA}.\overline{PB}$$

Vì $\overline{PA}.\overline{PB} = \mathscr{P}_{P/(O)}$ nên $\overline{PH} = \dfrac{\mathscr{P}_{P/(O)}}{\overline{PO}}$ không đổi. Suy ra H cố định.

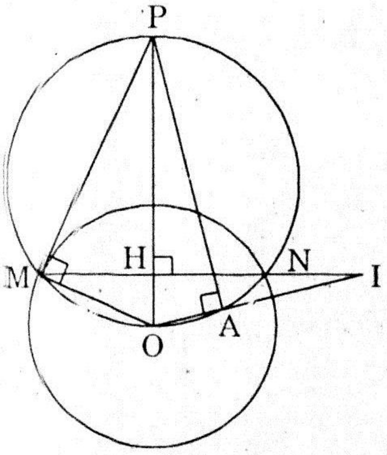
c) Do H cố định QH ⊥ PO, PO cố định nên Q nằm trên đường thẳng vuông góc với PO tại H trừ các điểm nằm trong đoạn thẳng MN với H được xác định bởi đẳng thức : $\overline{PH} = \dfrac{\mathscr{P}_{P/(O)}}{\overline{PO}}$.

2.77 Cho đường tròn (O) và điểm A cố định bên trong đường tròn. Cho điểm M di động trên đường tròn (O). Đường tròn ngoại tiếp tam giác OAM (kí hiệu là (OAM)) và tiếp tuyến của (O) tại M cắt nhau tại P.

a) Tìm quỹ tích các điểm P.

b) Chứng minh trục đẳng phương của (O) và (OAM) luôn đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn



a) PM là tiếp tuyến của (O) tại M, do đó OM ⊥ PM. Suy ra đường tròn ngoại tiếp OAM có đường kính OP và PA ⊥ OA. Điểm P nằm trên đường thẳng Δ và vuông góc với OA tại A. Đảo lại lấy P ∈ Δ và nằm ngoài đường tròn (O) thì đường tròn ngoại tiếp OAP có đường kính OP cắt đường tròn (O) tại M thì $\widehat{OMP} = 90^0$ nên PM là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại M.

Vậy quỹ tích (tập hợp) các điểm P là phần đường thẳng Δ nằm ngoài đường tròn (O) vuông góc với OA tại A.

b) Hai đường tròn (O) và (OAM) cắt nhau tại M và N, trục đẳng phương của (O) và (OAM) là đường thẳng MN cắt OA tại điểm I cắt OP tại H. Vì $\widehat{IAP} = \widehat{IHP} = 90^0$. Bốn điểm I, A, H, P nằm trên một đường tròn ta kí hiệu là (IAHP). Ta có :

$$\mathscr{P}_{O/(IAHP)} = \overline{OA}.\overline{OI} = \overline{OH}.\overline{OP}$$

Trong tam giác vuông OMP ta có OH.OP = OM^2 = R^2 không đổi

$$OA.OI = R^2 \quad \Rightarrow \quad OI = \frac{R^2}{OA}$$

O và A cố định suy ra I cố định. Vậy trục đẳng phương của (O) và (OAM) đi qua điểm I cố định.

BÀI TẬP TỰ GIẢI

2.78 Cho đường tròn (O) và hai dây cung AB và CD cắt nhau tại I.

a) Biết AI = 12, IB = 18, $\frac{IC}{ID} = \frac{3}{8}$. Tính CD.

b) Biết AI = 12, IB = 16, CD = 32. Tính CI và ID.

2.79 Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 90^0$, AB = c, AC = b. Kẻ đường cao AH Gọi (O_1), (O_2), (O_3) theo thứ tự là đường tròn ngoại tiếp các tam giá ABC, AHB và AHC. Tìm phương tích của H đối với (O_1), (O_2), (O_3).

2.80 Cho đường tròn (O; R) và một điểm cố định A không nằm trê đường tròn. Gọi BC là đường kính thay đổi của đường tròn (O Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC luôn đi qu một điểm cố định khác điểm A.

2.81 Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại hai điểm A, B. Mộ đường thẳng Δ tiếp xúc với (O_1) tại C và tiếp xúc với (O_2) tại D Chứng minh rằng đường thẳng AB đi qua trung điểm của CD.

2.82 Cho đường tròn (O; R) đường kính AB. Lấy điểm C trên đường trò khác A và B và vẽ tiếp tuyến Cx. Trên Cx lấy điểm K và dựng đườn tròn bán kính KC sao cho đường tròn này cắt đường thẳng AB tạ hai điểm M và N. Gọi I là trung điểm của MN. Chứng minh rằng :

a) $OA^2 = OB^2 = \overline{OM}.\overline{ON}$. **b)** $IM^2 = IN^2 = \overline{IA}.\overline{IB}$.

2.83 Cho đường tròn (O; R) và điểm P cố định trong đường tròn, điểm (di động trên đường tròn. Dựng đường thẳng qua O và vuông góc vớ PQ, cắt PQ tại H, cắt tiếp tuyến Qx của (O) tại M. Chứng minl rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác PHM luôn đi qua một điểm c định còn điểm M di động trên một đường thẳng cố định.

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG II

2.84 Tính giá trị các biểu thức :

a) $A = 2 - 3\sin^2 60^0 + 2\sin^3 150^0 - \cos^2 135^0$

b) $B = \tan^2 150^0 - \cot 135^0 - \cos^2 120^0 + \sin^2 45^0$.

2.85 Tìm các giá trị lượng giác của góc x :

a) Biết $\cos x = \frac{5}{13}$, $0^0 < x < 90^0$

b) Biết $\tan x = -\frac{4}{3}$, $90^0 < x < 180^0$.

2.86 Chứng minh các đẳng thức :

a) $\dfrac{\sin^2 x - \cos^2 x + \cos^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x + \sin^4 x} = \tan^4 x$

b) $\dfrac{1 - 4\sin^2 x \cos^2 x}{(\cos x + \sin x)^2} = 1 - 2\sin x \cos x$

2.87 Cho tam giác ABC với $BC = 8$, $AB = 7$, $AC = 10$. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CB}$.

2.88 Cho hình chữ nhật ABCD có $AB = 2$, $BC = 1$. Gọi trung điểm của AB và CD lần lượt là M, N. Gọi giao điểm AN và DM là I, giao điểm của MC và NB là K.

Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DK}.\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{DM}.\overrightarrow{IK}$.

2.89 Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a, tâm là O và điểm M bất kì. Chứng minh rằng : $T = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{OA}$ có giá trị không đổi khi M di động. Hãy tính giá trị của T theo a.

2.90 Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 120^0$. Gọi AD là phân giác trong của tam giác. Chứng minh rằng : $\dfrac{1}{AD} = \dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{AC}$.

2.91 Cho hình thang vuông ABCD, có $\widehat{A} = 90^0$, các đáy $AB = a$, $CD = b$, cạnh $AD = h$. Tìm điều kiện giữa a, b và h để AC và BD vuông góc với nhau.

2.92 Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp (quỹ tích) những điểm M sao cho :

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = MC^2 - MB^2 + BC^2.$$

2.93 Cho tam giác ABC có $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

a) Chứng minh rằng : $\dfrac{\tan A}{\tan B} = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{c^2 + b^2 - a^2}$

b) Cho $a = 4$, $b = 3$, $c = 2$. Tính diện tích, các đường cao và bán kính đường tròn ngoại tiếp, bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác.

2.94 Giải tam giác ABC, biết :

a) $a = 7$, $b = 9$, $\widehat{C} = 120^0$ **b)** $\widehat{A} = 60^0$, $h_c = \sqrt{3}$, $R = 5$.

Chương III

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

§1. Phương trình của đường thẳng

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Vectơ pháp tuyến và vectơ chỉ phương

Vectơ pháp tuyến : *Vectơ* $\vec{n} \neq \vec{0}$ *có giá* ***vuông góc*** *với đường thẳng* Δ *gọi là vectơ pháp tuyến của* Δ.

Vectơ chỉ phương : *Vectơ* $\vec{u} \neq 0$ *có giá* ***song song*** *với đường thẳng* Δ *gọi là vectơ chỉ phương của* Δ.

2. Phương trình của đường thẳng đi qua điểm $I(x_0, y_0)$ cho trước và vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ (A, B) cho trước

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

3. Phương trình đường thẳng đi qua điểm $I(x_0, y0)$ cho trước và có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ (a, b) cho trước có

+ *dạng chính tắc :* $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b}$ (*với* $a \neq 0,\ b \neq 0$)

+ *dạng tham số :* $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$ *với* $t \in R,\quad a^2 + b^2 \neq 0$

4. Phương trình tổng quát của đường thẳng

$$Ax + By + C = 0 \qquad (1)$$

trong đó A, B, C là 3 số cho trước với $A^2 + B^2 \neq 0$.

Đường thẳng (d) có phương trình tổng quát (1) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}(A,B)$ *và một vectơ chỉ phương là* $\vec{u}(-B,A)$.

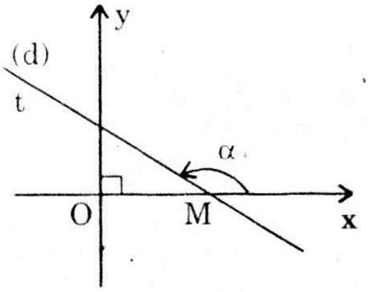
5. Phương trình đường thẳng theo đoạn chắn

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0 \qquad (a \neq 0,\ b \neq 0)$$

là phương trình đường thẳng đi qua hai điểm (a; 0) và (0; b).

6. Phương trình đường thẳng theo hệ số góc $y = kx + m$

*k góc là **hệ số góc** của đường thẳng $y = kx + m$.*



Ý nghĩa hình học :

Đường thẳng (d) cắt trục Ox tại M.

Mt là tia của (d) nằm phía trên trục Ox.

*Đặt $\widehat{xMt} = \alpha$ thì **hệ số góc của (d) bằng** $\tan\alpha$.*

7. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Trong mặt phẳng tọa độ cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 có phương trình : $\Delta_1 :\ A_1x + B_1y + C_1 = 0$

$\Delta_2 :\ A_2x + B_2y + C_2 = 0$

a) Δ_1 *và* Δ_2 *cắt nhau khi và chỉ khi* $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$

b) $\Delta_1 \,//\, \Delta_2$ *khi và chỉ khi*

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{hoặc} \quad \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

c) Δ_1 *trùng với* Δ_2 *khi và chỉ khi*

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} = 0 .$$

B. CÁC VÍ DỤ GIẢI TOÁN

3.1 Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm A(–1; 2), B(2; 3).

a) Tìm vectơ chỉ phương và vectơ pháp tuyến của đường thẳng Δ chứa A và B.

b) Tìm phương trình chính tắc của đường thẳng qua điểm I(1; 1) song song với đường thẳng Δ chứa A và B.

c) Tìm phương trình tham số của đường thẳng đi qua K(2; 5) vuông góc với đường thẳng Δ chứa A và B.

Hướng dẫn

a) Có thể lấy vectơ $\overrightarrow{AB} = (3; 1)$ làm vectơ chỉ phương của đường thẳng chứa A và B.

Vectơ pháp tuyến của đường thẳng chứa A, B là vectơ $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$. Có thể lấy $\vec{n} = (-1; 3)$ làm vectơ pháp tuyến.

Ghi chú : Nếu vectơ $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ thì mọi vectơ $k\vec{u}$ với $k \in R$, $k \neq 0$ đều là vectơ chỉ phương của Δ. Tương tự, nếu $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của Δ thì mọi vectơ $k\vec{n}$, $k \in R$, $k \neq 0$ đều là vectơ pháp tuyến của Δ.

b) $\overrightarrow{AB} = (3; 1)$ là vectơ chỉ phương của mỗi đường thẳng song song với đường thẳng chứa A và B. Vậy phương trình chính tắc của đường thẳng qua I(1; 1) song song với đường thẳng AB là : $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-1}{1}$.

c) Đường thẳng vuông góc với đường thẳng AB là đường thẳng có vectơ chỉ phương là vectơ pháp tuyến của đường thẳng AB.

Vectơ pháp tuyến của đường thẳng AB là $\vec{n}(-1; 3)$ nên phương trình dạng tham số của đường thẳng qua K(2; 5) vuông góc với AB là : $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 5 + 3t, \quad t \in R \end{cases}$

3.2 Cho đường thẳng Δ có phương trình tham số : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 - t \end{cases}$

a) Viết phương trình tổng quát của Δ.

b) Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm M(2; 3) song song với Δ.

c) Viết phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua điểm N(4; 2) vuông góc với Δ.

Hướng dẫn

a) Để có phương trình tổng quát của Δ ta khử tham số t trong phương trình tham số của nó : $y = -3 - t \quad \Rightarrow \quad t = -3 - y$

Thay vào phương trình của x :

$$x = 1 + 2t = 1 + 2(-3 - y) \quad \Leftrightarrow \quad x + 2y + 5 = 0 \qquad (*)$$

(*) là phương trình tổng quát của Δ.

b) Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương là $\vec{u}(2; -1)$ hay vectơ pháp tuyến là $\vec{n}(1; 2)$. Phương trình của đường thẳng (d) đi qua M(2; 3) và song song với Δ.

- Có dạng tham số là : $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 - t \end{cases}$
- Có dạng chính tắc là : $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-3}{-1}$.
- Có dạng pháp là : $(x - 2).1 + (y - 3).2 = 0$.
- Có dạng tổng quát là : $x + 2y - 8 = 0$.

c Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương là $\vec{u}(2; -1)$ thì mọi đường thẳng vuông góc với Δ đều nhận $\vec{u}$ là vectơ pháp tuyến. Phương trình dạng pháp của đường thẳng qua N(4; 2) vuông góc với Δ là :

$$2.(x - 4) - 1.(y - 2) = 0 \Leftrightarrow 2x - y - 6 = 0 \qquad (^{**})$$

Phương trình (**) là phương trình tổng quát của đường thẳng qua N(4; 2) vuông góc với Δ.

3.3 Cho tam giác ABC với A(−1; 2), B(2; 3), C(4; 6).

a) Tìm phương trình đường trung tuyến của tam giác kẻ từ B.

b) Tìm tọa độ trực tâm của tam giác ABC.

Hướng dẫn

a) Tọa độ trung điểm E của cạnh AC là :

$$E\left(\frac{x_A + x_C}{2}; \frac{y_A + y_C}{2}\right) \Leftrightarrow E\left(\frac{3}{2}; 4\right)$$

Trung tuyến của ΔABC kẻ từ B là đường thẳng chứa B, E có phương trình là :

$$\frac{x - x_B}{x_E - x_B} = \frac{y - y_B}{y_E - y_B} \Leftrightarrow \frac{x-2}{-\frac{1}{2}} = \frac{y-3}{1} \Leftrightarrow 2x + y - 8 = 0.$$

Ghi chú : Ta có thể tính tọa độ trọng tâm G của tam giác là $G\left(\frac{5}{3}; \frac{11}{3}\right)$ phương trình đường trung tuyến kẻ từ B là phương trình đường thẳng BG.

b) Tọa độ trực tâm H của tam giác ABC là giao điểm của đường cao AA' và đường cao BB'.

Ta có : AA' ⊥ BC, BB' ⊥ AC.

Vectơ pháp tuyến của AA' là $\overrightarrow{BC}$, của BB' là $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{BC} = (2; 3), \qquad \overrightarrow{AC} = (5; 4).$$

Với M(x, y) ∈ AA' thì phương trình đường cao AA' là :

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow (x + 1)2 + (y - 2)3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + 3y - 4 = 0$$

Với M(x, y) ∈ BB' thì phương trình đường cao BB' là :

$$\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow (x - 2)5 + (y - 3)4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x + 4y - 22 = 0.$$

Tọa độ trực tâm H của tam giác ABC là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4 = 0 \\ 5x + 4y - 22 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{50}{7} \\ y = -\dfrac{24}{7} \end{cases}$$

3.4 Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có đỉnh C(–2; –4) và trọng tâm G(0; 4).

Giả sử M(2; 2) là trung điểm của cạnh BC. Viết phương trình đường thẳng chứa các đỉnh A và B.

Hướng dẫn

Gọi tọa độ đỉnh B là (x; y). Vì M là trung điểm của BC nên

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} \Leftrightarrow 2 = \frac{x - 2}{2} \Rightarrow x = 6$$

$$y_M = \frac{y_B + y_C}{2} \Leftrightarrow 2 = \frac{y - 4}{2} \Rightarrow y = 8 \Rightarrow B(6; 8)$$

Vì G là trọng tâm nên ta có $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GM}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A - x_G = -2(x_M - x_G) \\ y_A - y_G = -2(y_M - y_G) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = x_G - 2(x_M - x_G) \\ y_A = y_G - 2(y_M - y_G) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 0 - 2.2 = -4 \\ y_A = 3.4 - 2.2 = 8 \end{cases} \Rightarrow A(-4; 8)$$

Phương trình đường thẳng chứa cạnh AB : y – 8 = 0.

3.5 Cho đường thẳng (Δ) : $2x - 3y + 5 = 0$ và điểm $I(2; 4)$.

a) Tìm phương trình dạng tham số của (Δ).

b) Tìm phương trình tổng quát của đường thẳng đối xứng với Δ qua điểm I.

Hướng dẫn

a) Để tìm phương trình tham số của Δ ta cần biết một điểm $M(x_0; y_0) \in \Delta$ và vectơ chỉ phương của Δ. Ta có : điểm $M\left(0; \frac{5}{3}\right) \in \Delta$ và $\vec{u}(3; 2)$ là vectơ chỉ phương của Δ.

Phương trình tham số của Δ là : $\begin{cases} x = 3t \\ y = \frac{5}{3} + 2t \end{cases}$

b) Đường thẳng Δ' đối xứng với Δ đối với điểm $I(x_0; y_0)$ nếu mỗi điểm của Δ' là điểm đối xứng đối với I của một điểm nào đó của Δ. Ta dễ chứng minh được là Δ' // Δ. Như vậy Δ' là đường thẳng qua điểm M' đối xứng với M qua I và song song với Δ.

$M'(x; y)$ đối xứng với $M\left(0; \frac{5}{3}\right)$ qua $I(2; 4)$

$$x + 0 = 2x_I = 4; \qquad y + \frac{5}{3} = 2.y_I = 8 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{19}{3}.$$

$M'\left(4; \frac{19}{3}\right) \in \Delta'$.

Phương trình tham số của Δ' : $\begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = \frac{19}{3} + 2t \end{cases}$

Phương trình tổng quát của Δ' : $2x - 3y + 11 = 0$.

3.6 Cho hai đường thẳng : $\Delta_1 : \begin{cases} x = -3 + t \\ y = 2 - 3t \end{cases}$

$\Delta_2 : \quad 3x + 5y - 7 = 0.$

a) Xét vị trí tương đối của Δ_1 và Δ_2.

b) Tìm phương trình tổng quát của đường thẳng Δ đi qua $M(1; 1)$ song song với Δ_2.

Hướng dẫn

a) Phương trình tổng quát của Δ_1 : $3x + y + 7 = 0$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 12 \neq 0 \qquad \text{Vậy } \Delta_1 \text{ và } \Delta_2 \text{ cắt nhau.}$$

b) Vectơ pháp tuyến của Δ_2 cũng là vectơ pháp tuyến của Δ là $\vec{n}(3; 5)$.
Phương trình pháp dạng của Δ đi qua M(1; 1) song song với Δ_2 là :

$$3(x - 1) + 5(y - 1) = 0$$

Phương trình tổng quát của Δ : $3x + 5y - 8 = 0$.

C. BÀI TẬP TỰ GIẢI

3.7 Viết phương trình tổng quát của đường thẳng :

a) Đi qua điểm A(–1; 3) có vectơ chỉ phương $\vec{u}(2; -3)$.

b) Đi qua điểm B(2; 1) và song song với đường thẳng (d) : $3x - 2y + 5 = 0$.

c) Đi qua điểm C(–1; 1) vuông góc với đường thẳng Δ : $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -3 + 2t \end{cases}$

3.8 Viết phương trình tổng quát của đường thẳng :

a) Đi qua điểm A(2; –3) có vectơ chỉ phương $\vec{u}\left(-\frac{1}{2}; 3\right)$

b) Đi qua điểm B(1; 2), có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(2; -3)$

c) Đi qua điểm $C(x_0; y_0)$ song song với trục Oy.

d) Đi qua điểm $D(x_1; y_1)$ song song với trục Ox.

3.9 Hãy tìm phương trình dạng tham số và dạng chính tắc các đường thẳng cho dưới đây :

a) $\Delta_1 : 3x - 5y + 7 = 0$

b) $\Delta_2 : \frac{x}{2} - \frac{y}{3} - 1 = 0$

c) $\Delta_3 : y = -\frac{2}{3}x + 4$

d) Δ_4 : đi qua (chứa) hai điểm $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$.

3.10 Cho tam giác ABC trong mặt phẳng tọa độ Oxy với A(2; 3), B(–1; 4), C(3; 6).

a) Viết phương trình tổng quát của đường trung tuyến kẻ từ C.

b) Tìm tọa độ của điểm H là chân đường cao kẻ từ A.

3.11 Hai cạnh của tam giác có phương trình lần lượt là $3x - 2y + 1 = 0$ và $x - y + 1 = 0$. Đường trung tuyến ứng với cạnh thứ nhất có phương trình $2x - y - 1 = 0$. Viết phương trình của cạnh thứ ba.

3.12 Một cạnh của tam giác có phương trình $x - 2y + 7 = 0$. Hai đường trung tuyến ứng với hai cạnh còn lại có phương trình $x + y - 5 = 0$ và $2x + y - 11 = 0$. Hãy viết phương trình hai cạnh còn lại của tam giác.

3.13 Hãy xác định đường thẳng qua điểm $A(1; 2)$ cắt trục hoành tại B, cắt trục tung tại C sao cho A thuộc đoạn thẳng BC và thỏa mãn $AB = 2AC$.

3.14 Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng cho dưới đây :

a) $2x - 5y + 3 = 0$ và $-3x + 7y - 8 = 0$

b) $x - 3y + 5 = 0$ và $\begin{cases} x = 3 + 6t \\ y = \dfrac{1}{2} + 2t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$.

c) $\begin{cases} x = 5 + 4t \\ y = -2 + 2t \end{cases}$ và $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 7 + 3t \end{cases}$

3.15 Tìm phương trình các đường thẳng chứa các cạnh của tam giác, biết tam giác có hai đỉnh $A(-1; 2)$, $B(2; 4)$ và trọng tâm $G(1; 1)$.

3.16 Tìm phương trình các đường thẳng chứa các cạnh của tam giác ABC, biết rằng tam giác có hai đỉnh $A(1; 1)$, $B(4; 5)$ và trực tâm $H(2; 3)$.

3.17 Cho tam giác ABC trong mặt phẳng tọa độ với $A(1; -2)$, $B(2; 3)$, $C(-3; 4)$. Tìm tọa độ của trực tâm H và tâm I đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

3.18 Cho tam giác ABC có ba cạnh AB, BC, AC theo thứ tự nằm trên ba đường thẳng : $5x - 3y + 2 = 0$

$3x + 4y - 22 = 0$

$2x - 7y - 5 = 0$

a) Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác.

b) Tìm tọa độ điểm G_1 đối xứng với G đối với cạnh AB : $5x - 3y + 2 = 0$.

3.19 Hình bình hành ABCD có tâm $I(1; 6)$. Các cạnh AB, BC, CD, DA theo thứ tự đi qua các điểm $P(3; 0)$, $Q(6; 6)$, $R(5; 9)$, $S(-5; 4)$. Viết phương trình các cạnh của hình bình hành đó.

3.20 Cho hình bình hành ABCD, biết rằng đường thẳng AB có phương trình $3x + 4y - 12 = 0$, đường thẳng AD có phương trình $5x - 12y - 6 = 0$. Trung điểm của cạnh BC là $E\left(-2; \dfrac{13}{6}\right)$. Hãy viết phương trình các cạnh còn lại của hình bình hành.

§2. Khoảng cách và góc

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Trong mặt phẳng tọa độ, khoảng cách từ điểm $M(x_0; y_0)$ *đến đường thẳng* $\Delta : Ax + By + C = 0$ *là số, kí hiệu* $d(M; \Delta)$*, xác định bởi công thức :*

$$d(M; \Delta) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

2. Điều kiện để hai điểm trong cùng một nửa mặt phẳng

Trong mặt phẳng tọa độ, cho hai điểm $M(x_M; y_M)$, $N(x_N; y_N)$ *và đường thẳng* $\Delta : Ax + By + C = 0$.

Điều kiện cần và đủ để M và N nằm trong cùng một nửa mặt phẳng bờ Δ *(nằm cùng phía đối với* Δ*) là*

$$(Ax_M + By_M + C)(Ax_N + By_N + C) > 0$$

Hệ quả *:* $M(x_M; y_M)$ *và* $N(x_N; y_N)$ *nằm khác phía đối với đường thẳng* $\Delta : Ax + By + C = 0$ *khi và chỉ khi*

$$(Ax_M + By_M + C)(Ax_N + By_N + C) < 0.$$

3. Phương trình đường phân giác

Phương trình hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng cắt nhau $\Delta_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $\Delta_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$ *là :*

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

4. Góc giữa hai đường thẳng

Hai đường thẳng Δ_1 *và* Δ_2 *cắt nhau tạo thành bốn góc. Góc có số đo nhỏ nhất của các góc đó gọi là góc của hai đường thẳng* Δ_1 *và* Δ_2 *và kí hiệu là* (Δ_1, Δ_2).

Giả sử $\Delta_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad (A_1^2 + B_1^2 \neq 0)$

$\Delta_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0 \quad (A_2^2 + B_2^2 \neq 0)$

thì cosin của góc của hai đường thẳng Δ_1 *và* Δ_2 *xác định bởi công* *thức :* $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \dfrac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$.

Hệ quả : $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$

B. CÁC VÍ DỤ GIẢI TOÁN

3.21 Cho đường thẳng $\Delta : 2x - 3y + 1 = 0$ và điểm $P(-1; 3)$.

a) Tìm khoảng cách từ điểm P đến đường thẳng Δ.

b) Tìm phương trình của đường thẳng Δ_1 đi qua P và cách điểm $Q(2; 5)$ khoảng cách bằng 3.

Hướng dẫn

a) Khoảng cách từ $P(-1; 3)$ đến đường thẳng Δ

$$d(P; \Delta) = \frac{|2(-1) - 3(3) + 1|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{10}{\sqrt{13}}$$

b) Phương trình tổng quát của $\Delta_1 : Ax + By + C = 0$. Từ điều kiện của đề bài : $P(-1; 3) \in \Delta_1 \Leftrightarrow A(-1) + B(3) + C = 0$ (1)

$$d(Q, \Delta_1) = \frac{|2A + 5B + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 3 \qquad (2)$$

Từ (1) suy ra $C = A - 3B$. Thay biểu thức của C vào (2) thì được :

$$\frac{|3A + 2B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 3 \Leftrightarrow 5B^2 - 12AB = 0$$

$$\Rightarrow B = 0 \quad \text{hoặc} \quad B = \frac{12A}{5}$$

- Với $B = 0$ ta có phương trình $\Delta_1 : x + 1 = 0$ (cho $A = 1$).
- Với $B = \dfrac{12A}{5}$ ta có phương trình $\Delta_1 : 5x + 12y - 31 = 0$.

3.22 Cho hai đường thẳng : $d_1 : 2x - y + 5 = 0$

$d_2 : 3x + 6y - 1 = 0$

a) Tìm tọa độ điểm A là giao điểm của d_1 và d_2.

b) Tìm số đo góc giữa d_1 và d_2.

c) Tìm đường thẳng d đi qua điểm $M(2; -1)$ lập với d_1, d_2 một tam giác cân đỉnh A.

Hướng dẫn

a) $\begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ 3x + 6y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{29}{15} \\ y = \dfrac{17}{15} \end{cases} \Rightarrow A\left(-\dfrac{29}{15}; \dfrac{17}{15}\right)$

b) $\cos(d_1, d_2) = \dfrac{|2.3 - 1.6|}{\sqrt{2^2(-1)^2}\sqrt{3^2 + 6^2}} = 0 \Rightarrow (d_1, d_2) = 90^0.$

c) Giả sử (d) có phương trình tổng quát $Ax + By + C = 0$.

Từ điều kiện tam giác cân đỉnh A và đi qua $M(2; -1)$ ta có :

$M(2; -1) \in d \Leftrightarrow 2A - B + C = 0$

$$(d, d_1) = (d, d_2) \Leftrightarrow \frac{|2A - B|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|3A + 6B|}{\sqrt{3^2 + 6^2}\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2A - B + C = 0 \\ 3(2A - B) = 3A + 6B \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 2A - B + C = 0 \\ 3(2A - B) = -(3A + 6B) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A \neq 0, \quad A \in R \\ B = \dfrac{A}{3} \\ C = -\dfrac{5A}{3} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} A \neq 0, \quad A \in R \\ B = -3A \\ C = -5A \end{cases}$$

Cho $A = 1$ ta được phương trình của đường thẳng d cần tìm là :

(d) : $3x + y - 5 = 0$ hoặc (d) : $x - 3y - 5 = 0$.

3.23 Cho đường thẳng d : $x + 2y + 4 = 0$ và điểm $M(1; 2)$.

a) Tìm số đo của góc hợp bởi d với đường thẳng $d_1 : x - 3y + 6 = 0$.

b) Tìm phương trình đường thẳng qua M và hợp với d một góc bằng 60^0.

Hướng dẫn

a) $\cos(d, d_1) = \dfrac{|1.1 + 2.(-3)|}{\sqrt{1^2 + 2^2}\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (d, d_1) = 45^0.$

b) Đường thẳng d_2 qua $M(1; 2)$ hợp với d góc 60^0 có phương trình tổng quát là $Ax + By + C = 0$ thì :

$$M(1; 2) \in d_2 \Leftrightarrow A + 2B + C = 0 \qquad (1)$$

$$(d_2, d) = 60^0 \Leftrightarrow \frac{|1.A + 2.B|}{\sqrt{1^2 + 2^2}\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{1}{2} \qquad (2)$$

$$(2) \Rightarrow A^2 - 16AB - 11B^2 = 0 \Rightarrow A = (8 \pm 5\sqrt{3})B$$

Thay vào (1) được $C = -(10 \mp 5\sqrt{3})$. Suy ra (lấy $B = 1$)

$$\therefore \quad d_2 : (8 + 5\sqrt{3})x + y - 10 - 5\sqrt{3} = 0$$

$$\text{hoặc} \quad (8 - 5\sqrt{3})x + y - 10 + 5\sqrt{3} = 0.$$

3.24 Cho tam giác ABC với A(3; 3), B(−1; 2), C(4; 1).

a) Tìm số đo của góc A và số đo của các đường thẳng AB và AC.

b) Viết phương trình của đường phân giác trong của góc A.

c) Tìm diện tích của tam giác ABC.

Hướng dẫn

a) Phương trình của các đường thẳng AB và BC lần lượt là :

$$AB : \frac{x - 3}{-1 - 3} = \frac{y - 3}{2 - 3} \Leftrightarrow x - 4y + 9 = 0$$

$$AC : \frac{x - 3}{4 - 3} = \frac{y - 3}{1 - 3} \Leftrightarrow 2x + y - 9 = 0$$

Vectơ pháp tuyến của AB là $\vec{n}_{AB} = (1; -4)$.

Vectơ pháp tuyến của AC là $\vec{n}_{AC} = (2; 1)$.

$$\cos A = \frac{\vec{n}_{AB} . \vec{n}_{AC}}{|\vec{n}_{AB}| . |\vec{n}_{AC}|} = \frac{1.2 - 4.1}{\sqrt{17}.\sqrt{5}} = \frac{-2}{\sqrt{85}} \Rightarrow \hat{A} = 102^0 32'$$

Góc của các đường thẳng AB và AC là góc nhọn với :

$$\cos(AB, AC) = \frac{|1.2 - 4.1|}{\sqrt{17}.\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{85}} \Rightarrow (AB, AC) \approx 77^0 28'$$

b) Bởi vì $\vec{n}_{AB} . \vec{n}_{AC} < 0$ góc $\hat{A}$ tù nên phương trình đường phân giác trong của góc A của tam giác ABC là :

$$\frac{x - 4y + 9}{\sqrt{1^2 + (-4)^2}} = -\frac{2x + y - 9}{\sqrt{2^2 + 1^2}}$$

c) Diện tích tam giác ABC : $S_{ABC} = \frac{1}{2}a.h_a$

$$a = BC = \sqrt{(4+1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{26}$$

h_a là đường cao kẻ từ đỉnh A bằng khoảng cách từ A đến đường thẳng BC :

$$\frac{x+1}{4+1} = \frac{y-2}{1-2} \Leftrightarrow x + 5y - 9 = 0.$$

$$h_a = \frac{|3 + 5.3 - 9|}{\sqrt{1^2 + 5^2}} = \frac{9}{\sqrt{26}}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{26}.\frac{9}{\sqrt{26}} = \frac{9}{2} \text{ đvdt.}$$

Ghi chú : Ta có thể tính diện tích tam giác bằng cách sử dụng các công thức khác không phải tính các đường cao.

3.25 Cho tam giác ABC có phương trình các cạnh :

$$AB : 2x - y + 2 = 0; \qquad AC : x + 3y - 6 = 0.$$

Một đường phân giác trong của tam giác có phương trình là $x - 2y = 0$.

Xác định tâm và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Hướng dẫn

Ta có : $\vec{n}_{AB} = (2; -1)$, $\vec{n}_{AC} = (1; 3)$,

$$\vec{n}_{AB}.\vec{n}_{AC} = 2.1 - 1.3 = -1 < 0$$

nên phương trình đường phân giác trong của góc A

$$\frac{2x - y + 2}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = -\frac{x + 3y - 6}{\sqrt{1^2 + 3^2}} \Leftrightarrow (2\sqrt{2} + 1)x + (3 - \sqrt{2})y + 2\sqrt{2} - 6 = 0$$

Tâm I của đường tròn nội tiếp là giao của hai đường phân giác trong có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} (2\sqrt{2} + 1)x + (3 - \sqrt{2})y + 2\sqrt{2} - 6 = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow I(12 - 8\sqrt{2}; 6 - 4\sqrt{2}).$$

Bán kính đường tròn nội tiếp bằng khoảng cách từ I đến một cạnh của tam giác :

$$r = d(I; AB) = \frac{|2(12 - 8\sqrt{2}) - (6 - 4\sqrt{2}) + 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{20\sqrt{5} - 12\sqrt{10}}{5}.$$

C. BÀI TẬP TỰ GIẢI

3.26 Cho điểm $M(-2; 1)$ và đường thẳng $(d) : 3x - 5y + 6 = 0$.

a) Tìm khoảng cách từ M đến đường thẳng d.

b) Tìm phương trình đường thẳng d' đi qua M và cách điểm $N(1; 2)$ khoảng cách bằng 2.

3.27 Cho đường thẳng $(d) : 2x + 3y - 5 = 0$ và hai điểm $M(3; m)$ và $N(6; 2)$, m là một số cho trước.

Tìm giá trị của m để hai điểm M và N nằm trong cùng một nửa mặt phẳng bờ là d.

3.28 Cho đường thẳng $(\Delta) : 3x - 4y + 6 = 0$. Tìm tập hợp (quỹ tích) các điểm M cách (d) khoảng cách bằng 3.

3.29 Cho hai đường thẳng $2x + 3y + 5 = 0$ (Δ_1) và $2x - 3y - 7 = 0$ (Δ_2). Tìm tập hợp (quỹ tích) các điểm M cách đều (Δ_1) và (Δ_2).

3.30 Cho đường thẳng (d): $2x - 5y + 4 = 0$ và ba điểm $A(-1; 2)$, $B(2; 3)$, $C(-3; -4)$. Đường thẳng d cắt những cạnh nào của tam giác ABC.

3.31 Cho ba điểm $A(-1; 1)$, $B(2; 5)$, $C(4; 2)$. Tìm đường thẳng cách đều A, B, C.

3.32 Cho hai đường thẳng :

$$(d_1) : x + y + 6 = 0$$

$$(d_2) : x - 4y - 10 = 0$$

a) Viết phương trình các đường phân giác của các góc tạo bởi d_1 và d_2.

b) Tìm số đo góc của hai đường thẳng d_1 và d_2.

3.33 Viết phương trình của đường thẳng Δ' đi qua điểm $A(3; 5)$ và lập với đường thẳng. $(\Delta) : 2x + 5y - 18 = 0$ một góc bằng 45^0.

3.34 Cho ba điểm $A(2; 3)$, $B(1; 1)$, $C(6; 5)$. Viết phương trình đường phân giác của góc tạo bởi các đường thẳng AB, AC và có chứa điểm $M(0; 3)$.

3.35 Cho tam giác ABC với $A(2; 0)$, $B(4; 1)$, $C(1; 3)$. Viết phương trình của đường phân giác trong của góc A.

3.36 Cho tam giác cân ABC có cạnh bên BC nằm trên đường thẳng $x - 3y - 5 = 0$, cạnh bên AC nằm trên đường thẳng $x + y + 1 = 0$ và cạnh đáy AB đi qua điểm $M(1; 1)$. Viết phương trình của đáy AB.

3.37 Cho tam giác ABC có phương trình các cạnh là :

$$(AB):\quad 4x + 3y - 1 = 0$$

$$(AC):\quad 3x + 4y - 6 = 0$$

$$(BC):\quad y = 0.$$

Viết phương trình đường phân giác trong của góc A và tìm tâm đường tròn nội tiếp.

3.38 Cho tam giác ABC có đỉnh $A(-1; 3)$, đường cao BH nằm trên đường thẳng $y = x$. Phân giác trong của góc C nằm trên đường thẳng $x + 3y + 2 = 0$. Viết phương trình cạnh BC.

3.39 Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $B(4; -3)$, $C(12; 5)$.

a) Tính độ dài đường cao tam giác OBC kẻ từ đỉnh O.

b) Viết phương trình của đường phân giác trong của góc O của tam giác.

3.40 Cho hai điểm $A(3; 0)$, $B(-1; 8)$.

a) Viết phương trình đường thẳng Δ qua A song song với đường thẳng $x - y = 0$.

b) Viết phương trình đường thẳng d qua B và cắt Δ tại điểm C sao cho tam giác ABC cân đỉnh C.

3.41 Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $A(6; 3)$, $B(0; 5)$.

a) Viết phương trình đường thẳng qua B vuông góc với đường thẳng OA và cắt OA tại D. Tính tọa độ của D.

b) Qua D dựng các đường thẳng vuông góc với AB, OB và cắt các đường này tại E và F. Tìm tọa độ của E và F.

3.42 Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $I(1; 0)$ đường thẳng Δ : $x - y + 1 = 0$, điểm $A \in \Delta$ có hoành độ $x_A = 2$. Viết phương trình các cạnh của hình chữ nhật ABCD nhận A làm đỉnh, cạnh AB nằm trên Δ và I là tâm đối xứng.

3.43 Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $I(2; 1)$, đường thẳng Δ : $x - 2y + 2 = 0$. Viết phương trình các cạnh của hình thoi nhận I làm tâm, có đỉnh $A(0; 1)$ và cạnh AB trên đường thẳng Δ.

3.44 Cho đường thẳng Δ có phương trình :

$$(m - 3)x - (m - 2)y + m - 1 = 0 \quad (\text{m là tham số})$$

a) Tìm giá trị của m để Δ // Ox.

b) Tìm giá trị của m để Δ song song với đường thẳng $x + 3y - 4 = 0$.

c) Tìm giá trị của m để Δ vuông góc với đường thẳng $2x - y + 1 = 0$.

3.45 Cho hai đường thẳng $\Delta_1 : 3x - 4y + 15 = 0$,

$\Delta_2 : 5x + 2y - 1 = 0$

và đường thẳng $\Delta_m : mx - (2m - 1)y + 9m - 13 = 0$ (m là tham số).

Xác định m để các đường thẳng Δ_1, Δ_2 và Δ_m đồng qui.

3.46 Cho hai đường thẳng $\Delta_m : \ 2(m - 1)x + y - 2 = 0$

$\Delta'_m : \ (m + 2)x + (m - 1)y - 3 = 0$

Hãy biện luận theo m vị trí tương đối của hai đường thẳng.

3.47 Cho các đường thẳng $\Delta_1 : \ mx + y - 3 = 0$

$\Delta_2 : \ x + my - 2m - 1 = 0$ (m là tham số)

Tìm các giá trị nguyên của m để Δ_1 và Δ_2 cắt nhau tại điểm có tọa độ nguyên.

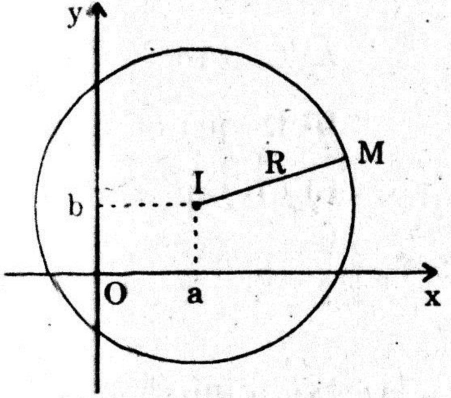
3.48 Cho hai đường thẳng :

$$\Delta_1 : \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -1 + t \end{cases} \quad t \in R \qquad\qquad \Delta_2 : \begin{cases} x = 2 + 3s \\ y = -2 - s \end{cases} \quad s \in R$$

Tìm tọa độ giao điểm của Δ_1 và Δ_2.

§3. Đường tròn

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN



1. Phương trình đường tròn

Trên mặt phẳng tọa độ, đường tròn (C) có tâm I(a; b), bán kính R có phương trình :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \qquad (1)$$

2. Nhận dạng phương trình đường tròn

Định lí : *Phương trình :* $x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$, *với điều kiện* $A^2 + B^2 > C$ *là phương trình đường tròn tâm* $I(-A; -B)$ *và bán kính* $R = \sqrt{A^2 + B^2 - C}$.

3. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

Cho đường tròn (C) tâm $I(a; b)$ bán kính R và đường thẳng Δ : $Ax + By + C = 0$. Khoảng từ $I(a; b)$ đến Δ là $d(I; \Delta)$

$$d(I; \Delta) = \frac{|Aa + Bb + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

+ *Δ cắt (C)* $\Leftrightarrow$ $d(I; \Delta) < R$

+ *Δ tiếp xúc với (C)* $\Leftrightarrow$ $d(I; \Delta) = R$

+ *Δ không có điểm chung với (C)* $\Leftrightarrow$ $d(I, \Delta) > R$.

4. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn

Tiếp tuyến với đường tròn tâm $I(a; b)$ tại điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc đường tròn có phương trình :

$$(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0.$$

5. Vị trí tương đối của hai đường tròn

Cho hai đường tròn (C_1) tâm $I_1(a_1; b_1)$ bán kính R_1 và (C_2) tâm $I_2(a_2; b_2)$ bán kính R_2.

+ *(C_1) cắt (C_2) tại hai điểm* $\Leftrightarrow$ $|R_1 - R_2| < I_1I_2 < R_1 + R_2$.

+ *(C_1) tiếp xúc với (C_2)* , $\Leftrightarrow$ $|R_1 - R_2| = I_1I_2$

hoặc $I_1I_2 = R_1 + R_2$.

+ *(C_1) và (C_2) không có điểm chung* $\Leftrightarrow$ $I_1I_2 > R_1 + R_2$.

B. CÁC VÍ DỤ GIẢI TOÁN

3.49 Viết phương trình của đường tròn trong các trường hợp sau :

a) Có tâm là điểm I(2; 3) và đi qua điểm M(3; 6).

b) Đi qua ba điểm A(–1; –2), B(1; 3), C(2; 1).

c) Có tâm là điểm I(3; –2) và tiếp xúc với đường thẳng

$$6x - 8y - 17 = 0.$$

Hướng dẫn

a) Bán kính đường tròn bằng khoảng cách từ tâm đến một điểm tùy ý thuộc đường tròn :

$$R = IM = \sqrt{(3-2)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{10}$$

Đường tròn tâm $I(2; 3)$ đi qua $M(3; 6)$ có phương trình :

$$(x-2)^2+(y-3)^2=10$$

b) Tâm của đường tròn qua ba điểm là giao điểm của các đường trung trực của ba đoạn thẳng nối các điểm đó.

Trung điểm của AB là : $M\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Phương trình trung trực của AB là :

$$2(x-0)+5\left(y-\frac{1}{2}\right)=0 \Leftrightarrow 2x+5y-\frac{5}{2}=0.$$

Trung điểm của AC là $N\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

Phương trình đường trung trực của AC là :

$$3\left(x-\frac{1}{2}\right)+3\left(y+\frac{1}{2}\right)=0 \Leftrightarrow x+y=0$$

Giao điểm I của hai trung trực, là tâm của đường tròn. Tọa độ của I là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases}2x+5y-\dfrac{5}{2}=0\\ x+y=0\end{cases} \Rightarrow I\left(-\frac{5}{6}; \frac{5}{6}\right)$$

Bán kính đường tròn :

$$R=IB=\sqrt{\left(1+\frac{5}{6}\right)^2+\left(3-\frac{5}{6}\right)^2}=\frac{\sqrt{290}}{6}$$

Phương trình đường tròn cần tìm : $\left(x+\frac{5}{6}\right)^2+\left(y-\frac{5}{6}\right)^2=\frac{290}{36}$.

c) Bán kính đường tròn bằng khoảng cách từ tâm đến đường thẳng tiếp tuyến.

$$R=d(I;\Delta)=\frac{|6.3-8(-2)-17|}{\sqrt{6^2+(-8)^2}}=\frac{17}{10}$$

Phương trình đường tròn : $(x-3)^2+(y+2)^2=\left(\frac{17}{10}\right)^2$.

3.50 Viết phương trình của đường tròn :

a) Đi qua hai điểm A(3; 1), B(−1; 3) và có tâm nằm trên đường thẳng $3x - y - 2 = 0$.

b) Có tâm nằm trên đường thẳng $2x + y - 1 = 0$ và tiếp xúc với cả hai đường thẳng $d_1 : 3x + 4y - 1 = 0$ và $d_2 : 4x + 3y - 8 = 0$.

Hướng dẫn

a) Tâm của đường tròn là giao của đường trung trực của AB và đường thẳng $3x - y - 2 = 0$.

Trung trực của AB : $4(x - 1) - 2(y - 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x - y = 0$

Tọa độ tâm I : $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x - y - 2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad I(2; 4)$

Phương trình đường tròn :

$$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = IA^2 = (-1)^2 + 3^2 = 10.$$

b) Để đường tròn tiếp xúc với cả hai đường thẳng d_1 và d_2 thì tâm của nó phải nằm trên phân giác của góc tạo bởi d_1 và d_2. Như vậy tâm đường tròn là giao điểm của đường thẳng $2x + y - 1 = 0$ và đường phân giác của các góc tạo bởi d_1, d_2 :

$$\frac{3x + 4y - 1}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \pm \frac{4x + 3y - 8}{\sqrt{4^2 + 3^2}}$$

Giải hệ phương trình :

$$(A) \quad \begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ 3x + 4y - 1 = 4x + 3y - 8 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad I_1\left(\frac{8}{3}; -\frac{13}{3}\right)$$

$$(B) \quad \begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ 3x + 4y - 1 = -(4x + 3y - 8) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad I_2\left(-\frac{2}{7}; \frac{11}{7}\right)$$

Bán kính đường tròn tâm I_1 là khoảng cách từ I_1 đến đường thẳng (d_1) :

$$d(I_1; d_1) = \frac{\left|3.\frac{8}{3} + 4\left(-\frac{13}{3}\right) - 1\right|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{31}{15}$$

$$d(I_2; d_1) = \frac{\left|3.\left(-\frac{2}{7}\right) + 4\left(\frac{11}{7}\right) - 1\right|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{31}{35}$$

Vậy các đường tròn có tâm nằm trên đường thẳng $2x + y - 1 = 0$ tiếp xúc với d_1 và d_2 là :

$$(C_1) : \left(x - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{13}{3}\right)^2 = \left(\frac{31}{15}\right)^2$$

$$(C_2) : \left(x + \frac{2}{7}\right)^2 + \left(y - \frac{11}{7}\right)^2 = \left(\frac{31}{35}\right)^2.$$

3.51 Xác định tâm và bán kính của các đường tròn :

a) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$

b) $4x^2 + 4y^2 + 16x - 12y + 7 = 0.$

Hướng dẫn

a) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 2^2.$

Tâm đường tròn : $I(1; -2)$, bán kính $R = 2$.

b) $4x^2 + 4y^2 + 16x - 12y + 7 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4x - 3y + \frac{7}{4} = 0$

$$\Leftrightarrow (x + 2)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - 4 - \frac{9}{4} + \frac{7}{4} = 0 \Leftrightarrow (x + 2)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{2}.$$

Đường tròn có tâm $I\left(-2; \frac{3}{2}\right)$ bán kính $R = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

3.52 Tập hợp các điểm $M(x; y)$ trên mặt phẳng tọa độ là (C_m) thỏa mãn hệ thức : $(C_m) : x^2 + y^2 - 2mx + 2(m + 2)y + 2m^2 + 4m - \frac{1}{2} = 0$, m là một số thực.

a) Chứng minh rằng (C_m) luôn luôn là một đường tròn có bán kính không đổi khi m thay đổi.

b) Tìm tập hợp tâm của đường tròn (C_m) khi m thay đổi.

Hướng dẫn

a) Hệ thức mà (C_m) thỏa mãn có thể viết thành :

$$(x - m)^2 + (y + m + 2)^2 = \frac{9}{2} \qquad (*)$$

(*) là phương trình đường tròn tâm $I(m; -(m + 2))$ bán kính không đổi $r = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

b) Tâm đường tròn (C_m)

$$I(x; y) : \begin{cases} x = m \\ y = -m - 2 \quad \Rightarrow \quad y = -x - 2 \end{cases}$$

Vậy quỹ tích tâm I(x; y) của đường tròn là đường thẳng $y = -x - 2$.

3.53 Cho đường tròn (C) có phương trình : $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$.

a) Viết phương trình tiếp tuyến với đường tròn tại điểm P(1; 1).

b) Viết phương trình tiếp tuyến với đường tròn đi qua điểm Q(4; 7).

Hướng dẫn

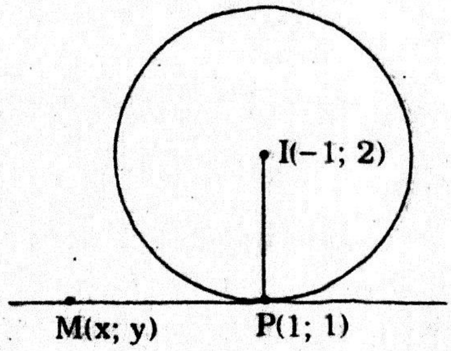
a) Phương trình (C) có thể viết thành : $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$.

Vậy (C) là đường tròn tâm I(–1; 2), bán kính $R = \sqrt{5}$.

Điểm P(1; 1) có tọa độ thỏa mãn phương trình của (C) thì phương trình tiếp tuyến với (C) tại P(1; 1) là :

$$\big(1 - (-1)\big)(x - 1) + (1 - 2)(y - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - y - 1 = 0.$$

Ghi chú : Ta có thể lập phương trình tiếp tuyến với đường tròn tại điểm P(1; 1) trực tiếp theo tính chất vuông góc tiếp tuyến với bán kính đường tròn đi qua tiếp điểm như sau :



Gọi M(x; y) là một điểm trên tiếp tuyến khác với P thì :

$$\overrightarrow{PI} \perp \overrightarrow{PM} \Leftrightarrow \overrightarrow{PI}.\overrightarrow{PM} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (-1 - 1)(x - 1) + (2 - 1)(y - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -2x + y + 1 = 0.$$

b) Thay tọa độ của Q vào phương trình của (C) ta thấy :

$$4^2 + 7^2 + 2.4 - 4.7 = 45 > 0$$

Vậy Q nằm ngoài đường tròn. Đường thẳng Δ qua Q(4; 7) có phương trình tổng quát là :

$$\Delta : A(x - 4) + B(y - 7) = 0 \quad \text{với} \quad A^2 + B^2 \neq 0.$$

Để Δ là tiếp tuyến thì khoảng cách từ tâm I đến Δ phải bằng bán kính đường tròn :

$$d(I, \Delta) = \frac{|A(-1 - 4) + B(2 - 7)|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow \quad 25(A^2 + 2AB + B^2) = 5(A^2 + B^2) \quad \Leftrightarrow \quad A = -\frac{B}{2} \text{ hoặc } A = -2B$$

Cho B = 1 ta có hai tiếp tuyến kẻ từ Q là :

$$\Delta_1 : \quad -2(x-4) + y - 7 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2x + y + 1 = 0$$

$$\Delta_2 : \quad -\frac{1}{2}(x-4) + y - 7 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{x}{2} + y - 5 = 0$$

3.54 Cho đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - 2x + \frac{4}{5} = 0$

và đường thẳng Δ : $mx - y - 2m + 3 = 0$, m là tham số.

Với những giá trị nào của m thì đường thẳng và đường tròn không có điểm chung.

Hướng dẫn

(C) : $(x-1)^2 + y^2 = \frac{1}{5}$, tâm là I(1; 0), bán kính $R = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

(C) và (Δ) không có điểm chung nếu khoảng cách từ I đến Δ lớn hơn bán kính, nghĩa là :

$$d(I, \Delta) = \frac{|m - 0 - 2m + 3|}{\sqrt{m^2 + 1}} > \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{m^2 - 6m + 9}{m^2 + 1} > \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow \quad 4m^2 - 30m + 44 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad m < 2 \text{ hoặc } m > \frac{11}{2}.$$

Ghi chú :

- Nếu $d = \frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow m = 2$ hoặc $m = \frac{11}{2}$ thì Δ tiếp xúc với (C).
- Nếu $d < \frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow 2 < m < \frac{11}{2}$ thì Δ cắt (C) tại hai điểm.

3.55 Cho hai đường tròn : (C_1) : $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$.

(C_2) : $x^2 + y^2 - 4x + 10y - 7 = 0$.

a) Chứng minh rằng hai đường tròn này giao nhau.

b) Tìm tọa độ các giao điểm của hai đường tròn (C_1) và (C_2).

Hướng dẫn

a) $(C_1) : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$, có tâm $I_1(1; 2)$, bán kính $R_1 = 2$.

$(C_2) : (x-2)^2 + (y+5)^2 = 36$, có tâm $I_2(2; -5)$, bán kính $R_2 = 6$.

Khoảng cách hai tâm của 2 đường tròn :

$$I_1I_2 = \sqrt{(2-1)^2 + (-5-2)^2} = \sqrt{50}$$

$$R_2 - R_1 = 6 - 2 < I_1I_2 < 2 + 6 = R_1 + R_2$$

Vậy (C_1) cắt (C_2).

b) Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x + 10y - 7 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0 \\ x - 7y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7y - 4 \\ 50y^2 - 74y + 25 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{59 + 7\sqrt{119}}{50} \\ y_1 = \dfrac{37 + \sqrt{119}}{50} \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} x_2 = \dfrac{59 - 7\sqrt{119}}{50} \\ y_2 = \dfrac{37 - \sqrt{119}}{50} \end{cases}$$

Các giao điểm $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ được xác định như trên.

C. BÀI TẬP TỰ GIẢI

3.56 Lập phương trình của đường tròn :

a) Có đường kính AB với A(–1; 5), B(3; 4).

b) Ngoại tiếp tam giác ABC với A(1; 3), B(5; 6), C(7; 0).

3.57 Viết phương trình của đường tròn :

a) Có tâm I(–3; 4), tiếp xúc với đường thẳng $3x - 5y + 6 = 0$.

b) Đi qua hai điểm A(1; 3), B(0; 2) và tiếp xúc với đường thẳng $x - y + 1 = 0$.

3.58 Viết phương trình của đường tròn :

a) Tiếp xúc với các trục tọa độ và đi qua điểm A(2; 4).

b) Đi qua hai điểm A(4; 2), B(5; 1) và có tâm nằm trên đường thẳng $2x - y = 0$.

c) Tiếp xúc với trục hoành, có tâm nằm trên đường thẳng $x + y - 3 = 0$ và bán kính bằng 1.

d) Tiếp xúc với đường thẳng $x - 2y + 1 = 0$ tại điểm A(1; 0) và đi qua điểm B(3; –6).

3.59 Viết phương trình của đường tròn :

a) Đi qua điểm $A(4; 2)$ và tiếp xúc với hai đường thẳng $x - 3y - 2 = 0$ và $x - 3y + 18 = 0$.

b) Có tâm nằm trên đường thẳng $x = 5$ và tiếp xúc với hai đường thẳng $3x - y + 3 = 0$ và $x - 3y + 9 = 0$.

c) Đi qua hai điểm $A(3; 4)$, $B(1; 2)$ và tiếp xúc với đường thẳng $3x + y - 3 = 0$.

3.60 Viết phương trình của đường tròn :

a) Tiếp xúc với đường thẳng $x + y - 3 = 0$ tại điểm $A(2; 1)$ và có bán kính bằng $2\sqrt{2}$.

b) Nội tiếp tam giác ABC có ba cạnh thuộc ba đường thẳng :

$$AB : x - 4 = 0$$

$$BC : 3x - 4y + 36 = 0$$

$$AC : 4x + 3y + 23 = 0.$$

3.61 Tìm tâm và bán kính các đường tròn :

a) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$.

b) $x^2 + y^2 - \frac{24}{13}x + 4y - \frac{701}{169} = 0$.

3.62 Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn :

a) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ tại điểm $A(-1; -2)$.

b) $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15 = 0$ tại điểm $A(2; -1)$.

3.63 Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn :

a) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ đi qua điểm $A(4; 6)$.

b) $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ đi qua điểm $B(3; 5)$.

3.64 Cho hai đường tròn : $(C_1) : x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$

$(C_2) : x^2 + y^2 - 12x - 6y + 44 = 0$

Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn.

3.65 Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 4x + y - 12 = 0$

và đường thẳng Δ : $x + 2y + 4 = 0$.

a) Tìm tọa độ các giao điểm của Δ và (C).

b) Viết phương trình các tiếp tuyến với đường tròn (C) tại các giao điểm của (C) và Δ.

3.66 Cho đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0$.

a) Viết phương trình các tiếp tuyến với đường tròn (C) nhận vectơ $\vec{a} = (1; -1)$ làm vectơ chỉ phương.

b) Tìm tọa độ của tiếp điểm.

3.67 Cho hai đường tròn : $(C_1) : x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$

$(C_2) : x^2 + y^2 - 10x - 14y + 70 = 0$

a) Chứng tỏ rằng hai đường tròn này tiếp xúc ngoài với nhau.

b) Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn tại tiếp điểm.

3.68 Cho hai đường tròn : $(C_1) : x^2 + y^2 - 7x - y = 0$.

$(C_2) : x^2 + y^2 - x - 7y - 18 = 0$.

a) Chứng tỏ rằng (C_1) và (C_2) cắt nhau.

b) Tìm tọa độ các giao điểm của hai đường tròn.

3.69 Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho họ đường cong (C_m) có phương trình : $m(x^2 + y^2) - 2(2m + 1)x + 2y + 2m + 1 = 0$, m là tham số.

a) Chứng minh rằng trong họ (C_m) có một đường thẳng duy nhất, còn lại là các đường tròn.

b) Tìm quỹ tích tâm các đường tròn (C_m) khi m thay đổi.

c) Xác định các giá trị của m ứng với các đường tròn của họ có bán kính bằng 1.

d) Trong họ (C_m) có những đường tròn đi qua gốc tọa độ không ?

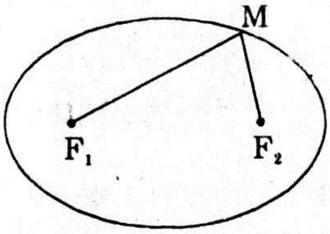
e) Xác định các giá trị của tham số để gốc tọa độ O luôn nằm ngoài các đường tròn.

§4. Đường Elip

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa đường elip

Cho hai điểm cố định F_1 và F_2 với $F_1F_2 = 2c$ (c > 0). Đường elip là tập hợp các điểm M sao cho $MF_1 + MF_2 = 2a$, trong đó a là số không đổi lớn hơn c.



*Hai điểm F_1 và F_2 gọi là các **tiêu điểm** của elip : Khoảng cách 2c được gọi là **tiêu cự** của elip. Các đoạn thẳng MF_1 và MF_2 là các **bán kính qua tiêu** của điểm M.*

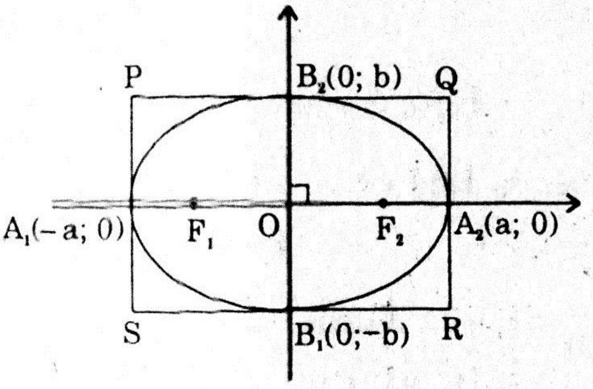
2. Phương trình chính tắc của elip

Trong mặt phẳng tọa độ, cho các điểm $F_1(-c; 0)$ và $F_2(c; 0)$ $c > 0$ thì phương trình của elip nhận F_1, F_2 làm các tiêu điểm là :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

*trong đó $b^2 = a^2 - c^2$. Phương trình (1) gọi là **phương trình chính tắc** của elip.*

*Dễ thấy elip (1) nhận các trục tọa độ làm các **trục đối xứng**, gốc độ O làm **tâm đối xứng**.*



*Elip (1) cắt các trục tọa độ tại các điểm $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$, $B_1(0; -b)$, $B_2(0; b)$ gọi là các **đỉnh** của elip. Đoạn thẳng $A_1A_2 = 2a$ chứa các tiêu điểm là **trục lớn**. Đoạn thẳng $B_1B_2 = 2b$ gọi là **trục nhỏ** của elip (1).*

*Các đường thẳng $x = \pm a$, $y = \pm b$ cắt nhau từng đôi tại **P, Q, R, S** tạo thành hình chữ nhật cơ sở của elip.*

3. Tâm sai của elip

*là tỉ số giữa tiêu cự và độ dài trục lớn, kí hiệu là **e***

$$e = \frac{c}{a} \qquad \text{(trong elip } c < a \text{ nên } e < 1\text{).}$$

4. Đường chuẩn của elip

Elip có phương trình chính tắc $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ *thì*

- *Đường thẳng* $\Delta_1 : x = -\dfrac{a}{e}$ *là* ***đường chuẩn của elip ứng với tiêu điểm*** $F_1(-c; 0)$.
- *Đường thẳng* $\Delta_2 : x = \dfrac{a}{e}$ *là* ***đường chuẩn của elip ứng với tiêu điểm*** $F_2(c; 0)$.

Tính chất : *Với mọi điểm M thuộc elip ta luôn có :*

$$\frac{MF_1}{d(M;\Delta_1)} = \frac{MF_2}{d(M;\Delta_2)} = e \qquad (e < 1).$$

B. CÁC VÍ DỤ GIẢI TOÁN

3.70 Tìm tọa độ các tiêu điểm, các đỉnh, độ dài trục lớn trục nhỏ của mỗi elip có phương trình sau :

a) $\dfrac{x^2}{49} + \dfrac{y^2}{25} = 1$ **b)** $4x^2 + 9y^2 = 16$.

Hướng dẫn

a) Ta có : $a^2 = 49 \Rightarrow a = 7;$

$b^2 = 25 \Rightarrow b = 5.$

Do a > b nên $c^2 = a^2 - b^2 = 49 - 25 = 24 \Rightarrow c = 2\sqrt{6}$.

- Tiêu cự : $2c = 4\sqrt{6}$, tọa độ các tiêu điểm là :

  $F_1(-2\sqrt{6}; 0)$, $F_2(+2\sqrt{6}; 0)$
- Tọa độ các đỉnh là : $A_1(-7; 0)$, $A_2(7; 0)$, $B_1(0; -5)$, $B_2(0; 5)$
- Độ dài trục lớn : $2a = 14$
- Độ dài trục nhỏ : $2b = 10$.

b) $4x^2 + 9y^2 = 16 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{\frac{16}{9}} = 1.$

$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2, \quad b^2 = \dfrac{16}{9} \Rightarrow b = \dfrac{4}{3}.$

$$c^2 = a^2 - b^2 = 4 - \frac{16}{9} = \frac{20}{9} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{2\sqrt{5}}{3}.$$

- Tọa độ các tiêu điểm là : $F_1\left(-\frac{2\sqrt{5}}{3}; 0\right)$, $F_2\left(\frac{2\sqrt{5}}{3}; 0\right)$.
- Tọa độ các đỉnh : $A_1(-2; 0)$, $A_2(2; 0)$, $B_1\left(0; -\frac{4}{3}\right)$, $B_2\left(0; \frac{4}{3}\right)$.
- Độ dài trục lớn : $2a = 4$
- Độ dài trục nhỏ : $2b = \frac{8}{3}$.

3.71 Viết phương trình chính tắc của elip trong mỗi trường hợp sau :

a) Tâm O, một tiêu điểm là (3; 0), một đỉnh là (–5; 0).

b) Có tiêu cự bằng 8, tâm sai $e = \frac{1}{2}$, trục lớn nằm trên trục hoành x'x.

Hướng dẫn

a) Ta có : $a = |-5| = 5, \quad c = 3$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16 \quad \Rightarrow \quad b = 4.$$

Elip có phương trình chính tắc :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

b) Tiêu cự : $2c = 8 \quad \Rightarrow \quad c = 4$

Tâm sai $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad a = 2c = 8,$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{64 - 16} = 4\sqrt{3}.$$

Phương trình chính tắc của elip : $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$.

3.72 Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $F_1(0; -c)$, $F_2(0; c)$ với c là hằng số dương. Tìm tập hợp (quỹ tích) các điểm M sao cho

$$MF_1 + MF_2 = 2a \quad (a > c > 0).$$

Hướng dẫn

Giả sử M(x; y) sao cho $MF_1 + MF_2 = 2a$. Ta có :

$$MF_1^2 = (x - 0)^2 + (y - (-c))^2 = x^2 + (y + c)^2$$

$$MF_2^2 = x^2 + (y - c)^2$$

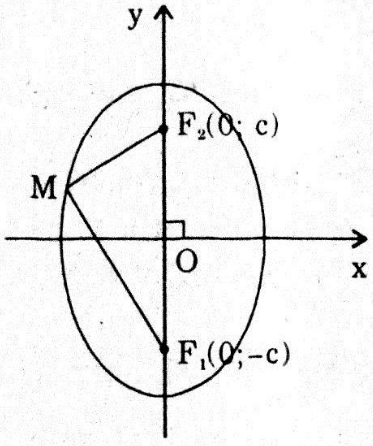
$$MF_1^2 - MF_2^2 = (y + c)^2 - (y - c)^2 = 4cy.$$

Vì $MF_1^2 - MF_2^2 = (MF_1 - MF_2)(MF_1 + MF_2)$

$$= 2a(MF_1 - MF_2)$$

$$\Rightarrow \quad MF_1 - MF_2 = 2\frac{c}{a}y$$

$$\Rightarrow \quad MF_1 = a + \frac{c}{a}y; \qquad MF_2 = a - \frac{c}{a}y$$



Suy ra : $a + \frac{c}{a}y = \sqrt{x^2 + (y + c)^2}$

$$\Rightarrow \quad \left(a + \frac{c}{a}y\right)^2 = x^2 + (y + c)^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 - c^2 = x^2 + \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)y^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Đặt $a^2 - c^2 = b^2$ ta được : $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ (1)

Tập hợp các điểm M(x; y) thỏa mãn yêu cầu đề bài là elip có : phương trình chính tắc (1) với $F_1(0; -c)$, $F_2(0; c)$ là các tiêu điểm của elip nằm trên trục tung y'y, tiêu cự 2c. Trục lớn nằm trên y'y có độ dài 2a, trục nhỏ trên trục hoành có độ dài 2b (với $b^2 = a^2 - c^2$).

Các đỉnh của elip này là : $A_1(-b; 0)$, $A_2(b; 0)$, $B_1(0; -a)$, $B_2(0; a)$.

C. BÀI TẬP TỰ GIẢI

3.73 Xác định độ dài trục lớn, trục nhỏ và tọa độ đỉnh của mỗi elip sau :

a) $x^2 + 25y^2 = 25$ **b)** $49x^2 + 64y^2 = 1$.

3.74 Xác định tọa độ tiêu điểm, tọa độ các đỉnh và tâm sai của mỗi elip sau :

a) $4x^2 + 5y^2 = 20$ **b)** $x^2 + 4y^2 - 64 = 0$.

3.75 Lập phương trình chính tắc của elip trong mỗi trường hợp dưới đây:

a) Ox, Oy là hai trục nhận hai điểm (5; 0) và (0; –3) làm hai đỉnh.

b) Tâm O, trục nhỏ Oy, tiêu cự bằng 6, tâm sai bằng $\frac{3}{5}$.

c) Hai đỉnh trên một trục (–4; 0) và (4; 0) một tiêu điểm (–3; 0).

d) Có tâm O, trục lớn trên trục hoành dài 8cm, tâm sai $\frac{\sqrt{5}}{8}$.

e) Tâm O, một tiêu điểm là (0; –4) và đi qua điểm $(-1; \sqrt{15})$.

3.76 Lập phương trình chính tắc của elip trong mỗi trường hợp sau đây :

a) Đi qua điểm $M\left(1; \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$ có tâm đối xứng O và tiêu cự bằng $4\sqrt{3}$.

b) Đi qua điểm $M\left(3; \frac{3}{4}\right)$, $N\left(-4; \frac{3}{5}\right)$.

c) Đi qua $M\left(1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ và có tâm sai $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3.77 Cho elip có phương trình $4x^2 + 9y^2 = 36$.

a) Tính.tọa độ các tiêu điểm tìm tâm sai của elip.

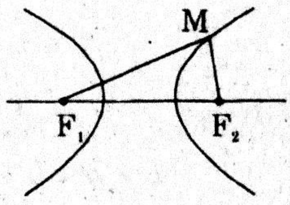
b) Tìm giá trị của k để điểm M(2; k) thuộc elip.

c) Với giá trị k từ câu b) hãy tính các bán kính qua tiêu điểm của điểm M.

§5. Đường hyperbol

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa đường hyperbol



Cho hai điểm cố định F_1, F_2 với $F_1F_2 = 2c$ $(c > 0)$.

Tập hợp các điểm M sao cho $|MF_1 - MF_2| = 2a$ trong đó $a > 0$ không đổi và $a > c$ được gọi là ***đường hyperbol****. Hai điểm F_1, F_2 gọi là các* ***tiêu điểm của hyperbol****.*

Khoảng cách $F_1F_2 = 2c$ gọi là ***tiêu cự của hyperbol****.*

2. Phương trình chính tắc của hyperbol

Trên mặt phẳng tọa độ, cho các điểm $F_1(-c; 0)$ và $F_2(c; 0)$ với $c > 0$ thì phương trình chính tắc của hyperbol nhận F_1, F_2 làm tiêu điểm là :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1) \qquad \text{trong đó} \quad b^2 = c^2 - a^2.$$

- *Hyperbol có phương trình chính tắc (1) nhận các trục tọa độ làm* ***trục đối xứng****, gốc tọa độ O làm* ***tâm đối xứng****.*
- *Hyperbol có phương trình (1) cắt trục hoành x'x tại hai điểm $A_1(-a; 0)$ và $A_2(a; 0)$ gọi là* ***hai đỉnh*** *của hyperbol. Nó không cắt trục tung y'y. Trục x'x chứa hai tiêu điểm gọi là* ***trục thực****, trục y'y không chứa tiêu điểm gọi là* ***trục ảo****. Độ dài đoạn thẳng nối hai điểm $A_1A_2 = 2a$ là* ***độ dài trục thực****, số 2b là* ***độ dài trục ảo****.*
- *Các* ***đường tiệm cận*** *của hyperbol (1) là :* $y = \pm \frac{b}{a}x.$

3. Tâm sai của hyperbol

là tỉ số giữa tiêu cự và trục thực

$$e = \frac{c}{a} \qquad (\text{với hyperbol } c > a, \text{ tâm sai } e > 1)$$

4. Đường chuẩn của hyperbol

Cho hyperbol : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (*).$

Ta gọi :

+ *Đường thẳng* $\Delta_1 : x + \frac{a}{e} = 0$ *là* ***đường chuẩn ứng với tiêu điểm*** $F_1(-c; 0)$.

+ *Đường thẳng* $\Delta_2 : x - \frac{a}{e} = 0$ *là* ***đường chuẩn ứng với tiêu điểm*** $F_2(c; 0)$.

Tính chất : *Với mọi điểm M thuộc hyperbol ta luôn có :*

$$\frac{MF_1}{d(M;\, \Delta_1)} = \frac{MF_2}{d(M;\, \Delta_2)} = e > 1.$$

B. CÁC VÍ DỤ GIẢI TOÁN

2.78 Xác định trục thực, trục ảo, tọa độ các tiêu điểm các đỉnh của hyperbol :

a) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$ **b)** $4x^2 - y^2 - 36 = 0.$

Hướng dẫn

a) Hyperbol có trục thực trên trục hoành x'x,

$$a^2 = 4, \quad b^2 = 9, \quad c^2 = a^2 + b^2 = 13.$$

Suy ra : $a = 2, \quad b = 3, \quad c = \sqrt{13}.$

- Độ dài trục thực : $2a = 4$
- Độ dài trục ảo : $2b = 6.$ Tiêu cự $2c = 2\sqrt{13}.$
- Tọa độ các tiêu điểm : $F_1(-\sqrt{13}\,;0)$, $F_2(\sqrt{13}\,;0)$.
- Tọa độ các đỉnh : $A_1(-2;0)$, $A_2(2;0)$.

b) $4x^2 - y^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{36} = 1.$

Suy ra $a = 3, \quad b = 6, \quad c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}.$

- Độ dài trục thực, trục ảo lần lượt là : $2a = 6$, $2b = 12$.
- Tọa độ tiêu điểm : $F_1(-3\sqrt{5}\,;0)$, $F_2(3\sqrt{5}\,;0)$,

  và đỉnh : $A_1(-3;0)$, $A_2(3;0)$.

3.79 Trong mỗi trường hợp dưới đây, hãy tìm độ dài trục thực, trục ảo, tiêu cự, tâm sai, tọa độ các tiêu điểm. Viết phương trình các đường chuẩn, đường tiệm cận của hyperbol.

a) $25x^2 - 16y^2 = 1$ **b)** $10x^2 - 2y^2 - 10 = 0$

Hướng dẫn

a) $25x^2 - 16y^2 = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{\frac{1}{25}} - \dfrac{y^2}{\frac{1}{16}} = 1.$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{1}{5}, \quad b = \frac{1}{4}, \quad c = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{\sqrt{41}}{20}.$$

- Độ dài trục thực : $2a = \dfrac{2}{5}$, trục ảo : $2b = \dfrac{1}{2}$, Tiêu cự : $2c = \dfrac{\sqrt{41}}{10}$, tâm sai $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{41}}{20} : \dfrac{1}{5} = \dfrac{\sqrt{41}}{4}$.

- Tọa độ các điểm $F_1\left(-\dfrac{\sqrt{41}}{20}; 0\right)$ và $F_2\left(\dfrac{\sqrt{41}}{20}; 0\right)$.

- Phương trình đường chuẩn : $\Delta_1 : x = -\dfrac{a}{e} = -\left(\dfrac{1}{5} : \dfrac{\sqrt{41}}{4}\right) = -\dfrac{4}{5\sqrt{41}}$

$$\Delta_2 : x = \frac{a}{e} = \frac{4}{5\sqrt{41}}.$$

- Phương trình các đường tiệm cận : $y = \pm\dfrac{b}{a}x = \pm\dfrac{5}{4}x$.

b) $10x^2 - 2y^2 - 10 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - \dfrac{y^2}{5} = 1$

$$\Rightarrow \quad a = 1, \quad b = \sqrt{5}, \quad c = \sqrt{6}.$$

Độ dài trục thực : $2a = 2$, trục ảo : $2b = 2\sqrt{5}$,

Tiêu cự : $2c = 2\sqrt{6}$. Tâm sai : $e = \sqrt{6}$.

Các tiêu điểm : $F_1(-\sqrt{6}; 0)$, $F_2(\sqrt{6}; 0)$

Các đường chuẩn : $\Delta_1 : x = -\dfrac{1}{\sqrt{6}}$, $\Delta_2 : x = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

Các đường tiệm cận : $y = \pm\sqrt{5}x$.

3.80 Viết phương trình chính tắc của hyperbol trong mỗi trường hợp sau

a) Một tiêu điểm $F_1(-7; 0)$ và hyperbol đi qua điểm $M(-2; 12)$.

b) Trục thực trên trục hoành có độ dài là 48, tâm sai $e = \dfrac{13}{12}$.

c) Tiêu cự bằng 8 và khoảng cách giữa hai đường chuẩn bằng 6, trục thực nằm trên trục hoành x'x.

d) Đi qua điểm $A(4\sqrt{2}; 5)$ và có đường tiệm cận $y = \dfrac{5x}{4}$.

Hướng dẫn

a) Hyperbol : $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ với $a^2 + b^2 = c^2 = 7^2 = 49$.

M(−2; 12) thuộc hyperbol nên có :

$$\begin{cases} \dfrac{(-2)^2}{a^2} - \dfrac{(12)^2}{b^2} = 1 \\ a^2 + b^2 = 49 \end{cases} \Rightarrow \quad a = 1, \quad b = 4\sqrt{3}.$$

Hyperbol có phương trình chính tắc : $x^2 - \dfrac{y^2}{48} = 1.$

b) Hyperbol $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

$$2a = 48, \quad a = 24, \quad e = \frac{c}{a} = \frac{13}{12} \Rightarrow c = \frac{13}{12}.24 = 26$$

$$b^2 = c^2 - a^2 = 100 \Rightarrow b = 10.$$

Phương trình cần tìm : $\dfrac{x^2}{24^2} - \dfrac{y^2}{10^2} = 1.$

c) Ta có : $2c = 8 \Rightarrow c = 4.$

$$\frac{2a}{e} = \frac{2a^2}{c} = 6 \Rightarrow a^2 = 3c = 12.$$

$$b^2 = c^2 - a^2 = 4^2 - 12 = 4.$$

Hyperbol có phương trình : $\dfrac{x^2}{12} - \dfrac{y^2}{4} = 1.$

d) Tiệm cận $y = \dfrac{b}{a}x = \dfrac{5}{4}x \Rightarrow \dfrac{b}{a} = \dfrac{5}{4}.$

$$\begin{cases} \dfrac{(4\sqrt{2})^2}{a^2} - \dfrac{25}{b^2} = 1 \\ b = \dfrac{5}{4}a \end{cases} \Rightarrow \quad a^2 = 16.$$

Phương trình cần tìm : $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{25} = 1.$

C. BÀI TẬP TỰ GIẢI

3.81 Cho hyperbol : $4x^2 - 16y^2 = 9.$

a) Tìm độ dài trục thực, trục ảo, tiêu cự.

b) Tính tâm sai, tọa độ các đỉnh và các tiêu điểm.

c) Viết phương trình các đường chuẩn, các đường tiệm cận.

3.82 Cho hyperbol : $3x^2 - 9y^2 = 12$.

a) Tìm tọa độ các đỉnh, các tiêu điểm, tâm sai, phương trình các đường chuẩn, đường tiệm cận.

b) Tìm giá trị của tham số k để đường thẳng $y = kx$ cắt hyperbol.

3.83 Viết phương trình chính tắc của hyperbol trong mỗi trường hợp sau :

a) Trục thực nằm trên trục hoành x'x có độ dài bằng 10, tâm sai $e = \frac{7}{5}$.

b) Trục thực nằm trên trục hoành x'x có độ dài $2\sqrt{15}$ đi qua điểm $A(5; -2)$.

c) Đi qua hai điểm $P(2\sqrt{7}; -3)$, $Q(-7; 6\sqrt{2})$.

d) Đi qua điểm $B(-2; 2\sqrt{3})$, có các tiệm cận là $y = \pm 2x$.

3.84 Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $F_1(0; -c)$ và $F_2(0; c)$. Tìm tập hợp các điểm $M(x; y)$ trên mặt phẳng tọa độ sao cho

$$|MF_1 - MF_2| = 2a \qquad (c > a > 0).$$

3.85 Cho hyperbol (H) : $9x^2 - y^2 - 9 = 0$.

a) Tìm tọa độ đỉnh, tọa độ tiêu điểm của (H).

b) Gọi các tiêu điểm của (H) là F_1, F_2. Tìm tọa độ điểm M thuộc (H) sao cho $F_1\widehat{M}F_2 = 90^0$.

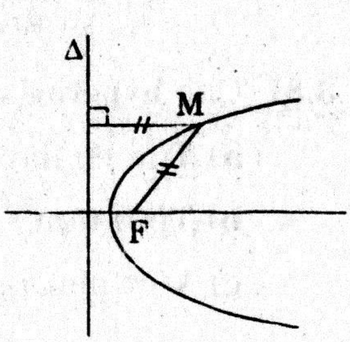
§6. Đường parabol

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa đường parabol

Cho đường thẳng Δ cố định và điểm F cố định không nằm trên Δ.

Tập hợp các điểm M có khoảng cách đến Δ và khoảng cách đến F bằng nhau được gọi là ***đường parabol****. Ta gọi điểm F là* ***tiêu điểm****, đường thẳng Δ là* ***đường chuẩn****, khoảng cách d(F; Δ) = p là* ***tham số tiêu*** *của parabol.*



2. Phương trình chính tắc của parabol

Trên mặt phẳng tọa độ, đường parabol có tiêu điểm $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ *và đường chuẩn* $\Delta : x = -\frac{p}{2}$ *có phương trình :*

$$y^2 = 2px \quad (p > 0) \qquad (1)$$

Phương trình (1) gọi là ***phương trình chính tắc của parabol.***

Đường parabol có phương trình chính tắc (1) nhận trục Ox làm ***trục đối xứng*** *và đi qua gốc tọa độ O gọi là* ***đỉnh của parabol.***

B. CÁC VÍ DỤ GIẢI TOÁN

3.86 Tìm tham số tiêu, tọa độ đỉnh, tiêu điểm và đường chuẩn của mỗi parabol cho dưới đây :

a) $y^2 = 4x$ **b)** $y^2 = -8x$ **c)** $3x^2 + 12y = 0$.

Hướng dẫn

a) Parabol dạng $y^2 = 2px$,

$2p = 4$, tham số tiêu : $p = 2$

Tọa độ đỉnh : O(0; 0).

Tiêu điểm F(1; 0). Đường chuẩn $x = -\frac{p}{2} = -1$.

b) Tham số tiêu : $p = -4$.

Tọa độ đỉnh O(0; 0).

Tiêu điểm F(−2; 0). Đường chuẩn : $x = -\frac{p}{2} = 2$.

c) $3x^2 + 12y = 0 \Leftrightarrow x^2 = -4y$.

Là parabol nhận Oy làm trục đối xứng đỉnh O(0; 0).

Tham số tiêu $p = 2$.

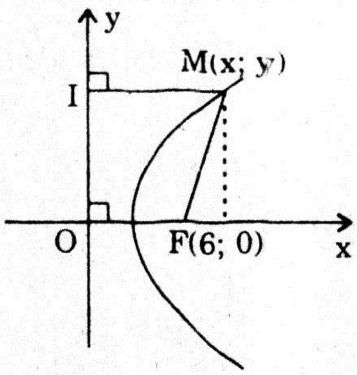
Tiêu điểm trên trục Oy : F(0; 1). Đường chuẩn $y = -1$.

3.87 Viết phương trình của parabol trong các trường hợp sau :

a) Trục Ox là trục đối xứng, tiêu điểm F(2; 0), đỉnh là O(0; 0).

b) Tiêu điểm là F(6; 0) và đường chuẩn là trục tung $x = 0$.

Hướng dẫn



a) Parabol có dạng $y^2 = 2px$. Tiêu điểm nằm trên trục hoành với tham số tiêu

$$p = 2.\left(\frac{p}{2}\right) = 2.2 = 4.$$

Vậy phương trình chính tắc của hyperbol là

$$y^2 = 2.2x = 4x.$$

b) Giả sử M(x; y) trên mặt phẳng tọa độ thỏa mãn điều kiện :

$$MF = MI \Leftrightarrow \sqrt{(x-6)^2 + y^2} = |x|$$

$$\Leftrightarrow (x-6)^2 + y^2 = x^2$$

$$\Leftrightarrow y^2 = 12(x-3).$$

C. BÀI TẬP TỰ GIẢI

3.88 Xác định tham số tiêu, tọa độ đỉnh, tọa độ tiêu điểm phương trình đường chuẩn của mỗi parabol dươi đây :

a) $y^2 = 18x$ **b)** $y^2 = -\sqrt{5}x$

c) $4x^2 + 16y = 0$.

3.89 Xác định tiêu điểm, đường chuẩn của parabol trong các trường hợp :

a) Có tham số tiêu p = 10, nhận trục Ox là trục đối xứng và đỉnh là gốc tọa độ.

b) Đi qua điểm $A\left(\frac{2}{3}; 4\right)$ nhận trục Ox làm trục đối xứng và đỉnh là gốc tọa độ.

3.90 Lập phương trình chính tắc của parabol trong các trường hợp sau :

a) Có đỉnh O, trục đối xứng x'x và tiêu điểm F(4; 0).

b) Có đỉnh O, trục đối xứng x'x đường thẳng x + 8 = 0 là đường chuẩn.

3.91 Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm F(0; p). Tìm quĩ tích (tập hợp) các điểm M(x; y) của mặt phẳng tọa độ sao cho khoảng cách từ M đến F bằng khoảng cách từ M đến trục hoành Ox.

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG III

3.92 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc với Oxy cho hai điểm B(4; –3) và C(12; 5).

a) Hãy tìm một vectơ chỉ phương, một vectơ pháp tuyến của đường thẳng BC.

b) Tìm độ dài đường cao của tam giác OBC kẻ từ đỉnh O đến cạnh BC.

c) Viết phương trình đường thẳng đi qua B và song song với cạnh OC.

3.93 Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm M(1; 6) và đường thẳng (d) : $2x - 3y + 3 = 0$.

a) Hãy viết phương trình của (d) dưới dạng phương trình theo đoạn chắn.

b) Viết phương trình của (d) dưới dạng tham số.

c) Viết phương trình của đường thẳng (d_1) đi qua M vuông góc với (d).

d) Tìm tọa độ của điểm N đối xứng với M qua (d).

3.94 Cho ba điểm trong mặt phẳng tọa độ M(–1; –1), N(1; 9), P(9; 1) là các trung điểm của ba cạnh một tam giác.

a) Viết phương trình ba cạnh của tam giác.

b) Tìm tâm và bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác.

3.95 Cho hai đường thẳng : (d_1) : $5x - 2y + 6 = 0$

(d_2) : $4x + 7y - 21 = 0$

a) Xét vị trí tương đối của (d_1) và (d_2). Nếu (d_1) và (d_2) cắt nhau, hãy tìm tọa độ của giao điểm của chúng.

b) Tìm góc của hai đường thẳng d_1 và d_2.

c) Viết phương trình các đường phân giác của các góc tạo bởi d_1 và d_2.

3.96 Một cạnh của hình vuông nằm trên đường thẳng $x + 3y - 3 = 0$ và tâm của hình vuông là I(–2; 0).

Tìm phương trình các cạnh còn lại và hai đường chéo.

3.97 Viết phương trình của đường tròn, đi qua hai điểm A(–1; 1), B(1; –3) và có tâm nằm trên đường thẳng $\Delta : 2x - y - 1 = 0$.

3.98 Viết phương trình đường tròn có tâm nằm trên đường thẳng $4x + 3y - 2 = 0$ và tiếp xúc với hai đường thẳng :

$$x + y + 4 = 0 \quad \text{và} \quad 7x - y + 4 = 0.$$

3.99 Cho đường tròn (C) : $x^2 + y^2 + 6x + 4y + 9 = 0$

đường thẳng (Δ) : $x - y + 2 = 0$

a) Tìm tọa độ tâm I và bán kính của (C).

b) Chứng tỏ rằng Δ và (C) cắt nhau.

c) Viết phương trình tiếp tuyến với đường tròn tại điểm A(–1; –2).

d) Viết phương trình tiếp tuyến với đường tròn đi qua điểm P(2; 1).

3.100 Cho hai đường tròn : $(C_1) : x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$

$$(C_2) : x^2 + y^2 - x - 7y + \frac{7}{2} = 0$$

a) Chứng tỏ rằng (C_1) và (C_2) cắt nhau.

b) Tìm tọa độ giao điểm của (C_1) và (C_2).

3.101 Cho hyperbol : $9x^2 - 16y^2 - 64 = 0$

a) Tìm độ dài hai trục, tiêu cự, tâm sai, tọa độ tiêu điểm phương trình các tiệm cận, đường chuẩn của hyperbol.

b) Tìm phương trình chính tắc của elip có tiêu điểm là các tiêu điểm của hyperbol trong câu a) và tâm sai $e = \frac{3}{5}$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM ÔN CUỐI NĂM

Bạn đọc đánh dấu vào phương án mà bạn cho là đúng.

1. Cho hình vuông ABCD tâm O. Trong các mệnh đề dưới đây có bao nhiêu mệnh đề đúng.

1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$;
2. $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$;
3. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} = 2\overrightarrow{CO}$.

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3.

2. Cho lục giác đều ABCDEF tâm O. Trong các mệnh đề dưới đây có bao nhiêu mệnh đề sai.

1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$;
2. $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DE} = \vec{0}$;
3. $\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{BC}$.

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3.

3. Trên trục tọa độ $(O; \vec{i})$ cho 3 điểm A, B, C có tọa độ theo thứ tự bằng -3; 2; 4. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{n} = 2\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AB}$.

A. -3 B. 4 C. -1 D. 5.

4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho các điểm $M(-1; 2)$, $N(2; 3)$, $P(0; 1)$, $Q\left(1; \frac{8}{3}\right)$. Tìm trong 4 điểm đã cho 3 điểm thẳng hàng.

A. M, N, P B. M, P, Q C. N, P, Q D. M, N, Q.

5. Cho ba vectơ $\vec{a}(2; 3)$, $\vec{b}(-1; 4)$, $\vec{c}(5; 2)$. Hãy biểu diễn vectơ $\vec{c}$ qua các vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$ B. $\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$

C. $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$ D. $\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} + 3\vec{b}$.

6. Cho 3 vectơ $\vec{a}(2; 3)$, $\vec{b}(-1; 1)$, $\vec{c}\left(\frac{2}{3}; -\frac{5}{6}\right)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u} = \vec{a} - 2\vec{b} + 6\vec{c}$.

A. (–2; –2) B. (3; –3) C. (4; –4) D. (8; –4).

7. Trong mặt phẳng tọa độ cho 3 điểm A(1; 2), B(–1; 1), C(2; 3). Điểm nào trong các điểm P(3; 2), Q(4; 4), R(–2; 1) hợp với A, B, C thành 4 đỉnh của hình bình hành.

A. P B. Q

C. R D. Một điểm khác P, Q, R.

8. Trong mặt phẳng tọa độ cho ba điểm A(2; 3), B(–1; 1), C(1; 2). Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Tìm cặp số thực (m; n) sao cho $\overrightarrow{GC} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$.

A. $\left(\frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right)$ B. $\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$

C. $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$. D. $\left(-\frac{5}{3}; \frac{4}{3}\right)$.

9. Cho tam giác ABC có AB = 5, AC = 7, BC = 6. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$.

A. 5 B. 6 C. –5 D. –6.

10. Cho hai vectơ $\vec{a}(1; 2)$, $\vec{b}(-2; 2)$. Hãy xác định vectơ $\vec{c}$, biết $\vec{a}.\vec{c} = 1$, $\vec{b}.\vec{c} = 4$.

A. $\vec{c}(-1; 1)$ B. $\vec{c}(-1; -1)$

C. $\vec{c}(2; 1)$ D. $\vec{c}(2; -1)$.

11. Cho tam giác ABC có AB = 8, AC = 9, BC = 10. Trên BC lấy điểm M sao cho BM = 7. Tính AM.

A. $\sqrt{55}$ B. $\sqrt{65}$ C. 6,5 D. Một số khác.

12. Cho hai vectơ $\vec{a}(2; 1)$ và $\vec{b}(3; 4)$. Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{3\sqrt{2}}{5}$ C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{3\sqrt{3}}{5}$.

13. Trong mặt phẳng tọa độ cho 3 điểm A(2; 1), B(−2; 3), C(5; 8). Tính cosin của góc A của tam giác ABC.

A. $\dfrac{1}{\sqrt{290}}$ B. $\dfrac{2}{\sqrt{320}}$

C. $\dfrac{3}{\sqrt{430}}$ D. Một giá trị khác.

14. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho các điểm A(1; 2), B(−2; 3), C(0; 4). Tính diện tích tam giác ABC.

A. 2 B. 5 C. 2,5 D. 3.

15. Cho tam giác ABC. Biết a = 7, b = 23, $\hat{C} = 130^0$. Tính độ dài cạnh c.

A. 22 B. 24 C. 26 D. 28.

16. Cho tam giác ABC, biết AB = 14, $\hat{A} = 60^0$, $\hat{B} = 40^0$. Tính độ dài cạnh AC.

A. 8,50 B. 8,66 C. 8,86 D. 9,26.

17. Cho tam giác ABC có a = 7, b = 8, c = 9. Tính độ dài đường cao kẻ từ A.

A. $9\sqrt{12}$ B. $12\sqrt{5}$ C. $11\sqrt{6}$ D. $10\sqrt{7}$.

18. Cho tam giác ABC với AB = 9, AC = 8, BC = 7. Tìm bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

A. $\dfrac{21\sqrt{5}}{10}$ B. $\dfrac{7\sqrt{15}}{10}$ C. $\dfrac{15\sqrt{5}}{8}$ D. $\dfrac{24\sqrt{3}}{13}$.

19. Trong mặt phẳng tọa độ cho hai điểm A(1; 3) và B(−3; 5). Viết phương trình tổng quát của đường trung trực của AB.

A. x + 2y − 5 = 0 B. 2x − y + 6 = 0

C. x − 2y + 6 = 0 D. 2x + y − 6 = 0.

20. Cho tam giác ABC với đỉnh A(−1; 1), các trung điểm của các cạnh AB, BC theo thứ tự là M(−2; −1), N(0; −2). Tìm phương trình cạnh BC.

A. 3x − y + 6 = 0 B. −x + y + 2 = 0

C. 2x − y + 6 = 0 D. 2x + 3y + 6 = 0.

21. Cho tam giác ABC với A(−2; 3), B(5; 1), C(3; 7). Tính độ dài đường cao kẻ từ đỉnh A.

A. $\frac{3\sqrt{13}}{2}$ B. $2\sqrt{11}$ C. $\frac{20\sqrt{6}}{11}$ D. $\frac{19\sqrt{10}}{10}$.

22. Trong mặt phẳng tọa độ cho các điểm A(1; 2), B(3; 4). Viết phương trình đường phân giác trong tại đỉnh O của tam giác OAB.

A. $(4 + 3\sqrt{5})x - (3 + \sqrt{5})y = 0$

B. $(4 - 3\sqrt{5})x + (3 - \sqrt{5})y = 0$

C. $(3 + 4\sqrt{3})x - (4 + \sqrt{3})y = 0$

D. $(6 - 3\sqrt{3})x - (2 + 3\sqrt{5})y = 0$.

23. Viết phương trình đường tròn tâm I(−1; 2) tiếp xúc với đường thẳng $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$.

A. $x^2 + y^2 + 2x - 4y + \frac{76}{25} = 0$

B. $x^2 + y^2 - 2x + 4y - \frac{49}{25} = 0$

C. $x^2 + y^2 + 2x - 4y - \frac{36}{25} = 0$

D. $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$.

24. Viết phương trình đường tròn tiếp xúc với các trục tọa độ, tâm trong góc phần tư thứ nhất và nằm trên đường thẳng $3x + 2y - 5 = 0$.

A. $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$

B. $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$

C. $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$

D. $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$.

25. Xét vị trí tương đối của hai đường tròn :

$$(C_1) : (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$$

$$(C_2) : (x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 9$$

A. cắt nhau B. tiếp xúc

C. ngoài nhau D. đựng nhau.

26. Cho đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$

và đường thẳng (Δ) : $mx - (m - 1)y - 3m + 3 = 0$ (m là tham số)

Với những giá trị nào của m thì Δ tiếp xúc với (C).

A. 0; 1　　B. –1; 0　　C. 2; 1　　D. 1; –2.

27. Cho đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0$

và đường thẳng Δ : $x + my + 2m + 4 = 0$.

Với giá trị nào của tham số m dưới đây thì Δ không cắt (C).

A. –1　　B. 3　　C. –2　　D. 1.

28. Chỉ ra phương trình của đường tròn có tâm nằm trên đường thẳng $x - 2y + 1 = 0$ và đi qua các điểm A(2; –2) và B(4; 0).

A. $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 8 = 0$

B. $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 8 = 0$

C. $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 10 = 0$

D. $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 10 = 0$.

29. Cho hai đường tròn : $(C_1) : x^2 + y^2 - x - 6y + 8 = 0$

$(C_2) : x^2 + y^2 - 2mx - 1 = 0$

Với những giá trị nào của tham số m thì (C_1) và (C_2) tiếp xúc ngoài nhau.

A. 2; –11　　B. 3; 11　　C. $2; -\frac{11}{2}$　　D. $\frac{7}{2}; \frac{9}{2}$.

30. Tiếp tuyến với đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ đi qua điểm M(0; 2) có phương trình là :

A. $12x - 5y + 10 = 0$　　B. $13x + 5y + 9 = 0$

C. $12x + 5y - 10 = 0$　　D. $13x - 6y - 10 = 0$.

31. Cho elip (E) : $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Trong các mệnh đề cho dưới đây có mấy mệnh đề đúng ?

1. (E) có một đỉnh A(2; 0).
2. (E) có các tiêu điểm $F_1(-3; 0)$, $F_2(3; 0)$.
3. (E) có độ dài trục nhỏ $2b = 4$.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3.

32. Cho hyperbol (H) : $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$.

Trong các mệnh đề dưới đây có mấy mệnh đề đúng.

1. (H) có độ dài trục ảo bằng 6.
2. (H) có tâm sai e = 1,2
3. (H) có tiêu cự bằng $\sqrt{34}$.

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3.

33. Cho hyperbol (H) : $144x^2 - 25y^2 = 3600$.

Trong các mệnh đề dưới đây có mấy mệnh đề sai.

1. (H) có tiêu điểm $F_1(-13; 0)$.
2. (H) có tâm sai e = 2.
3. (H) có đường chuẩn $x = \frac{25}{12}$.

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3.

34. Cho parabol (P) : $y^2 = 36x$.

Trong các mệnh đề dưới đây có mấy mệnh đề đúng.

1. (P) có tiêu điểm F(9; 0).
2. (P) có đường chuẩn x = −9.
3. (P) có đường tiệm cận y = 3x.

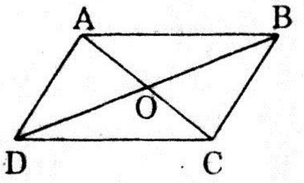
A. 0 B. 1 C. 2 D. 3.

PHẦN II

LỜI GIẢI, HƯỚNG DẪN, ĐÁP SỐ

Chương I VECTƠ

§1. Vectơ. phép cộng và phép trừ vectơ



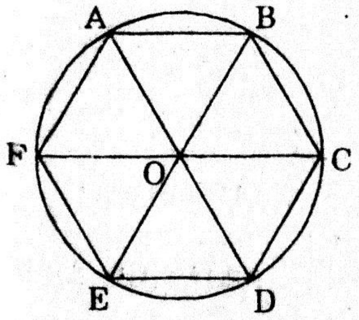
1.4 **a)** $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DA} + (-\overrightarrow{OD}) = \overrightarrow{DA}$

c) $\overrightarrow{BC} + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$

$$= \overrightarrow{BC} + (-\overrightarrow{BC}) = \vec{0}.$$

d) Tương tự câu c).



1.5 **a)** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{FO} = \overrightarrow{OC}$.

b) $-\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{EO} = \overrightarrow{OB}$.

c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} = \vec{0}$

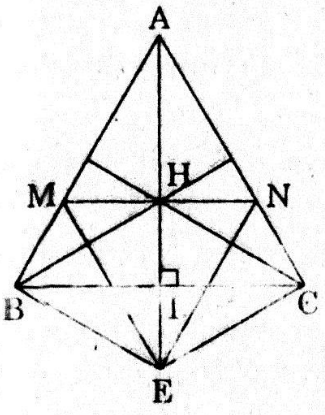
d) $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OF} = (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) + \overrightarrow{OF}$

$$= \overrightarrow{OC} + (-\overrightarrow{OC}) = \vec{0}.$$

1.6 Tam giác ABC đều, nên trực tâm cũng là trọng tâm. Gọi I là trung điểm của BC thì AH = 2HI.

Ta có MH = HN.

Theo tính chất của hình bình hành :



$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AE}$$

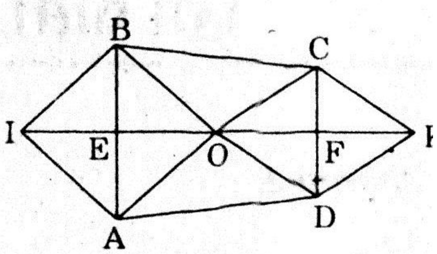
$$\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HE}$$

$$AE = 2AH = 2HE$$

$$\Rightarrow \quad |\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}| = 2|\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}|$$

1.7 **a)** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD})$

$$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \vec{0} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}.$$



b) Theo quy tắc hình bình hành

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OI}$ với $OI = 2OE$

$\overrightarrow{OC} + \quad = \overrightarrow{OK}$ với $OK = 2OF$

Do $OE = OF$ nên $OI = OK$

$\overrightarrow{OI} = -\overrightarrow{OK}$

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OK} = -\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OK} = \vec{0}$

1.8 Lấy điểm M bất kì ta có :

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = (\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{ME} - \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{MF} - \overrightarrow{MC})$$

$$= (\overrightarrow{ME} - \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{MF} - \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC})$$

$$= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD}$$

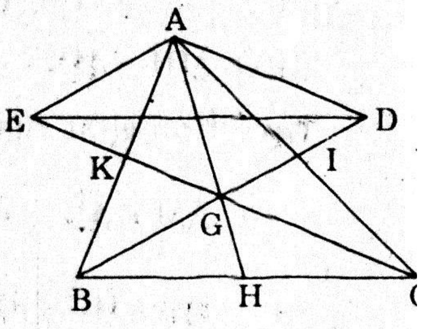
Ta cũng có

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = (\overrightarrow{MF} - \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{ME} - \overrightarrow{MC}) = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BD} + C$

1.9 $\sqrt{125}\text{cm} = 5\sqrt{5}\text{cm}$

1.10 **a)** $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{GC} \Rightarrow \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DC}$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{DC} \qquad (1)$$



Tương tự

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{GB} \Rightarrow \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GE} = \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{EB}$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{EB} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EB}$ (3)

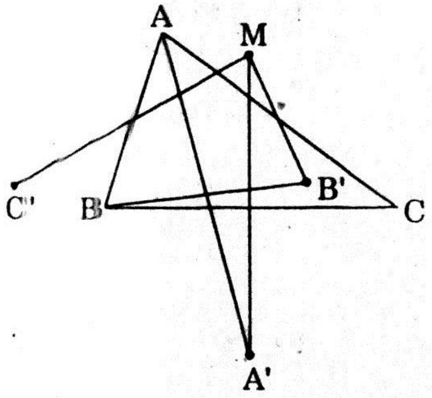
$$(3) \Rightarrow \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DB} \Rightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{ED}$$

b) Theo kết quả bài 1.1 thì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Thay $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GE}$. Ta được : $\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GC} = 0$

$\Rightarrow$ G là trung điểm của CE.

1.11 Theo quy tắc hình bình hành :



$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC'}$$

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MC'} + \overrightarrow{MC}$$

$$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA'}$$

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA'}$$

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA'} = \overrightarrow{MC'} + \overrightarrow{MC}$

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{MA'} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MC'} - \overrightarrow{MA}$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{C'A}$

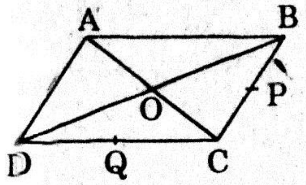
Áp dụng kết quả bài 1.3. Trung điểm của AA' trùng với trung điểm của CC'.

Tương tự, ta có : $\overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC'} + \overrightarrow{MC}$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{C'B}$

Suy ra trung điểm của BB' trùng với trung điểm của CC'. Vậy AA', BB' và CC' đồng quy tại điểm là trung điểm của mỗi đoạn.

§2. Tích của một vectơ và một số

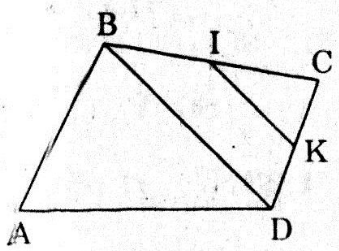
1.19 **a)** $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AO}$.



b) $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AO}$.

c) $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CQ} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AO}$.

1.20 **a)** $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{IK}$



b) $2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{DA}) =$

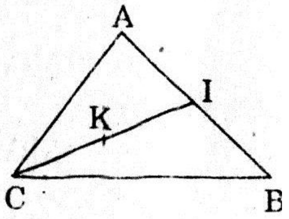
$= 2[(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AI})] = 2[\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{KI}]$

$= 2\overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{KI} = 2\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DB} = 3\overrightarrow{DB}$.

1.21 a) $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+2\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{CB}+2\overrightarrow{KC}=\vec{0}$

$$4\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=\vec{0} \quad\Rightarrow\quad 4\overrightarrow{CK}=2\overrightarrow{CI} \quad\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{CK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CI}$$

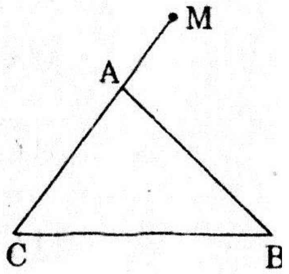
trong đó I là trung điểm của AB.



b) $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AB} \quad\Leftrightarrow\quad 2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$.

$2\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{MA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

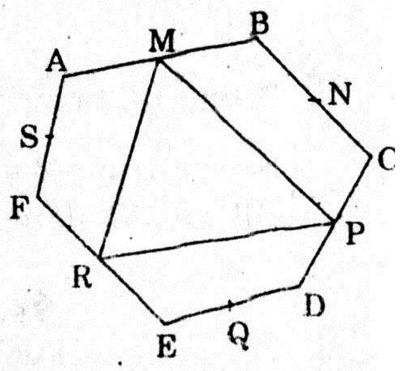


c) $\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{AB}-(\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{NA}=2\overrightarrow{AC}$$

N nằm trên tia đối của tia AC và AN = 2 AC.

1.22 Gọi G là trọng tâm của tam giác MPR, G' là trọng tâm của tam giác NQS. Ta có :



$$\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GP}+\overrightarrow{GR}=\vec{0}.$$

$$\overrightarrow{G'N}+\overrightarrow{G'Q}+\overrightarrow{G'S}=\vec{0}.$$

$$\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GP}+\overrightarrow{GR}=(\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'N}+\overrightarrow{NM})+$$

$$+(\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'Q}+\overrightarrow{QP})+(\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'S}+\overrightarrow{S'R})=\vec{0}$$

$$\Rightarrow 3\overrightarrow{GG'}+(\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{SR})+(\overrightarrow{G'N}+\overrightarrow{G'Q}+\overrightarrow{G'S})=\vec{0}$$

$$3\overrightarrow{GG'}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EC})+\vec{0}=3\overrightarrow{GG'}=\vec{0}$$

Suy ra G trùng với G'.

1.23 Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC

$$3\overrightarrow{IC}+2\overrightarrow{IB}=\vec{0} \quad\Rightarrow\quad 3(\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{GC})+2(\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{GB})=\vec{0} \qquad (1)$$

$$2\overrightarrow{JC} + 3\overrightarrow{JA} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad 2(\overrightarrow{JG} + \overrightarrow{GC}) + 3(\overrightarrow{JG} + \overrightarrow{GA}) = \vec{0} \qquad (2)$$

$$2\overrightarrow{KA} + 3\overrightarrow{KB} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad 2(\overrightarrow{KG} + \overrightarrow{GA}) + 3(\overrightarrow{KG} + \overrightarrow{GB}) = \vec{0} \qquad (3)$$

Cộng các hệ thức (1), (2) và (3) ta được :

$$5(\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{JG} + \overrightarrow{KG}) + 5(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = \vec{0} \qquad (4)$$

G là trọng tâm ΔABC nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Từ (4) suy ra $\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{JG} + \overrightarrow{KG} = \vec{0}$.

Chứng tỏ G cũng là trọng tâm tam giác IJK.

1.24 Ta có :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{ID}$$

$$= 4\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = k\overrightarrow{MI}.$$

Chọn I sao cho $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$

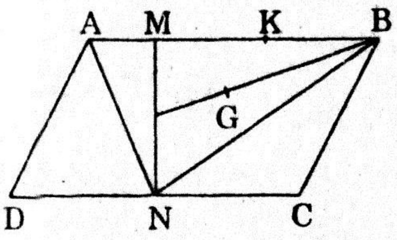
$$2(\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF}) = \vec{0}.$$

E là trung điểm của AB, F là trung điểm của CD.

$\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF} = \vec{0} \Leftrightarrow$ I là trung điểm của EF cố định.

Khi đó : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MI} = k\overrightarrow{MI} \quad \Leftrightarrow \quad k = 4$

1.25 a) $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$



$\Rightarrow \overrightarrow{AN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

b) $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NG}$

$\overrightarrow{NG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{NK}$ với K là trung điểm của MB.

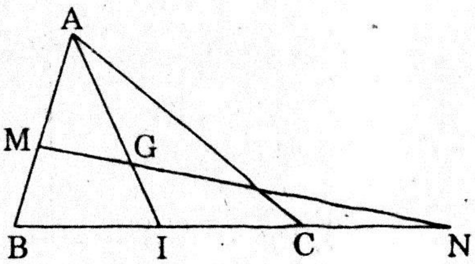
$\overrightarrow{NK} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AN}$.

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AN} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AN}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AN} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AK}$$

$$= \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) + \frac{2}{3}.\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{5}{18}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

1.26 $3\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MA} + 4(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{4}{7}\overrightarrow{AB}$$



$$\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AG}$$

$$= -\frac{4}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

$$\overrightarrow{MG} = -\frac{5}{21}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \qquad (1)$$

Gọi I là trung điểm của BC, ta có :

$$\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{IC}$$

$$\overrightarrow{IN} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{GN} = \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IN} = \frac{1}{6}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{BC} = \frac{\overrightarrow{AB}}{6} + \frac{\overrightarrow{AC}}{6} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{GN} = -\frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{7}{6}\overrightarrow{AC} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có :

$$\frac{6}{21}\overrightarrow{GN} = \frac{6}{21}\left(-\frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{7}{6}\overrightarrow{AC}\right) = -\frac{5}{21}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MG}.$$

Suy ra G, N, M thẳng hàng.

1.27 **a)** $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$

$$= 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})$$

$$= 4\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC}.$$

Chọn I trên mặt phẳng sao cho

$$2\,\overrightarrow{IA} + 3\,\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0} = 2\,\overrightarrow{IA} + 3(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) - (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC})$$

$$4\,\overrightarrow{IA} + 3\,\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}.$$

Suy ra điểm I cố định. Từ đẳng thức $\overrightarrow{MN} = 4\,\overrightarrow{MI}$ suy ra M, N, I thẳng hàng, nghĩa là MN luôn đi qua I khi M di động.

b) Điểm P là trung điểm của CN, nên :

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MC} = 2\,\overrightarrow{MP} = (2\,\overrightarrow{MA} + 3\,\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) + \overrightarrow{MC}.$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{MK} + \frac{3}{2}\overrightarrow{KB}$$

$$= \frac{5}{2}\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{KB}$$

Chọn K để $\overrightarrow{KA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{KB} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{KA} + \frac{3}{2}(\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$.

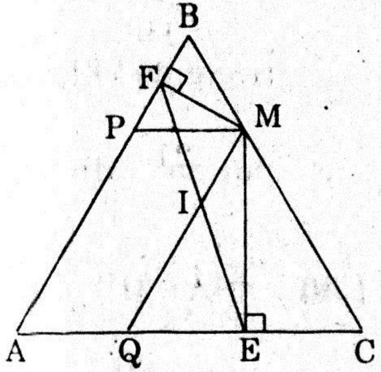
$$\Rightarrow \quad \frac{5}{2}\overrightarrow{AK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AK} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}.$$ Suy ra K cố định.

$$\overrightarrow{MP} = \frac{5}{2}\overrightarrow{MK}.$$ Suy ra M, P, K thẳng hàng.

1.28 Ta có : $\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = 2\,\overrightarrow{MI}$.

Kẻ MP // AC, MQ // AB

ta có : $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MA}$.



Vì tam giác ABC đều nên MP = MB,
MQ = MC

$$\overrightarrow{ME} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MC})$$

$$\overrightarrow{MF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MB})$$

$$2\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})$$

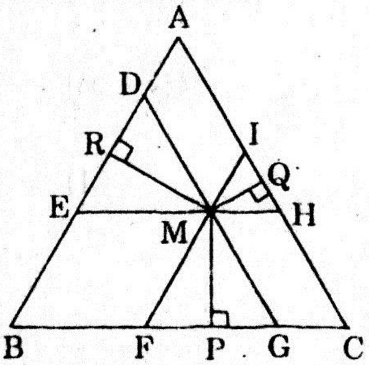
Gọi O là trọng tâm của tam giác ABC

$$2\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC})$$

$$= \frac{3}{2}\overrightarrow{MO} \quad (\text{vì } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0})$$

Suy ra M, I, O thẳng hàng. Nghĩa là MI luôn đi qua trọng tâm O của tam giác.

1.29 Qua M kẻ các đường thẳng song song với các cạnh của tam giác ABC ta được các tam giác nhỏ MDE, MFG, MHI (xem hình).



Trong tam giác PRQ ta có :

$$\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MR} = 3\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KP} + \overrightarrow{KQ} + \overrightarrow{KR}$$

$$= 3\overrightarrow{MK}$$

Mặt khác :

$$\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MG}), \quad \overrightarrow{MQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{MI}), \quad \overrightarrow{MR} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME})$$

$$3\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MR} = \frac{1}{2}[(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{MI}) + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MH}) + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MD})]$$

$$= \frac{1}{2}[\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA}] = \frac{1}{2}[3\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}]$$

trong đó O là trọng tâm của ΔABC $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0})$.

Suy ra $\overrightarrow{MK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MO}$, M, K, O thẳng hàng.

1.30 $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ (I là trung điểm AB, cố định).

$|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}| \Leftrightarrow |2\overrightarrow{MI}| = |\overrightarrow{BA}| = AB.$

$IM = \frac{AB}{2}$. Quỹ tích M là đường tròn tâm I bán kính $R = \frac{AB}{2}$.

1.31 Ta lấy điểm D trên mặt phẳng thì :

$$4\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = 4(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA}) - (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB}) = 3\overrightarrow{MD} + 4\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB}$$

Chọn D sao cho $4\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} = \vec{0}$

hay $\overrightarrow{DB} = 4\overrightarrow{DA}$ thì D cố định (trên đường thẳng AB)

Lấy điểm E trên mặt phẳng thì ta có :

$$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EA} + 2(\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EC}) = 3\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EA} + 2\overrightarrow{EC}.$$

Chọn E sao cho $\overrightarrow{EA} + 2\overrightarrow{EC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{EA} = 2\overrightarrow{CE}$

thì E là điểm cố định (trên đường thẳng AC).

$$|4\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MC}| \Leftrightarrow |3\overrightarrow{MD}| = |3\overrightarrow{ME}|$$

$$\Leftrightarrow MD = ME.$$

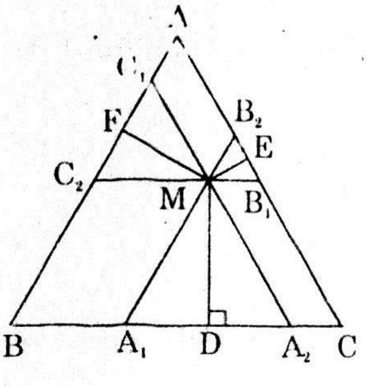
Suy ra quỹ tích M là đường trung trực của đoạn thẳng DE với D, E là các điểm được xác định bởi các hệ thức :

$$4\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{EA} + 2\overrightarrow{EC} = \vec{0}$$

1.32 **a)** Qua M kẻ các đường thẳng song song với các cạnh BC, AC và AB ta được các tam giác đều MA_1A_2, MB_1B_2, MC_1C_2 (xem hình), ta có :

$$\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MB_2} + \overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{MC_2})$$



$$= \frac{1}{2}[(\overrightarrow{MB_2} + \overrightarrow{MC_1}) + (\overrightarrow{MC_2} + \overrightarrow{MA_1}) + (\overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{MB_1})]$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \quad (1)$$

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{MO} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có đpcm.

b) $|\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}| = \left|\frac{3}{2}\overrightarrow{MO}\right| = k \quad \Rightarrow \quad OM = \frac{2k}{3}$.

O cố định. Quỹ tích M là đường tròn tâm O, bán kính $R = \frac{2k}{3}$.

1.33 **a)** Theo giả thiết : $\overrightarrow{EA}+3\overrightarrow{EB} = 2\overrightarrow{EC}$.

Suy ra $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB} = 2(\overrightarrow{EC}-\overrightarrow{EB}) = 2\overrightarrow{BC}$

Do M là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB} = 2\overrightarrow{EM}$

Suy ra $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{BC}$. Điều này chứng tỏ $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{EM}$ cùng phương hay EM // BC.

b) Ta có : $5\overrightarrow{AF}-2\overrightarrow{AC} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad 5(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MF}) = 2\overrightarrow{AC}$

$$\Rightarrow \quad 5\overrightarrow{MF} = 2\overrightarrow{AC}-5\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AC}-\frac{5}{2}\overrightarrow{AB} \qquad (1)$$

Ta cũng có : $5\overrightarrow{AF}-2\overrightarrow{AC} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad 5(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}) = 2\overrightarrow{AC}$

$$\Rightarrow \quad 5\overrightarrow{DF} = 2\overrightarrow{AC}-5\overrightarrow{AD} \qquad (2)$$

Mặt khác : $3\overrightarrow{DB}-2\overrightarrow{DC} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad 3(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}) = 2(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC})$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{DA} = 2\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AB} \qquad (3)$$

Từ (1), (2) và (3). Ta được : $\overrightarrow{MF} = 6\overrightarrow{DF}$ (4)

Đẳng thức (4) chứng tỏ MF đi qua D.

Đẳng thức $3\overrightarrow{DB}-2\overrightarrow{DC} = \vec{0}$ chứng tỏ BC đi qua D.

Vậy AD, BC, MF cùng đi qua D, tức là ba đường thẳng đó đồng quy.

§3. Trục tọa độ. Hệ trục tọa độ

1.40 **a)** $2\overline{OC} = \overline{OA}+\overline{OB} = -2+3 \quad \Rightarrow \quad \overline{OC} = \frac{1}{2}$.

b) D đối xứng với B qua A tức là A là trung điểm của DB. Gọi tọa độ của D là x ta có :

$$2\overline{OA} = \overline{OD} + \overline{OB} = x + 3.$$

$$\overline{OA} = -2 = \frac{x+3}{2} \quad \Rightarrow \quad x = -7.$$

c) $$\frac{\overline{EA}}{\overline{EB}} = \frac{-2-x}{3-x} = -3 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{7}{4} \qquad \overline{OE} = \frac{7}{4}.$$

d) Đặt $\overline{OF} = y$ ta có :

$$\overline{AF} + 4\overline{FB} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{AO} + \overline{OF} + 4\overline{FO} + \overline{OB} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 3\overline{OF} = 3y = 3 + 2$$

$$\Rightarrow \quad \overline{OF} = \frac{5}{3}.$$

1.41 a) $\overline{AB}.\overline{CD} + \overline{AC}.\overline{DB} + \overline{AD}.\overline{BC} = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{AB}(\overline{AD} - \overline{AC}) + \overline{AC}(\overline{AB} - \overline{AD}) + \overline{AD}(\overline{AC} - \overline{AB}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{AB}.\overline{AD} - \overline{AD}.\overline{AB} + \overline{AC}.\overline{AB} - \overline{AB}.\overline{AC} + \overline{AD}.\overline{AC} - \overline{AC}.\overline{AD} = 0.$$

b) $$\frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}} \quad \Leftrightarrow \quad 2\overline{AC}.\overline{AD} = \overline{AB}.\overline{AD} + \overline{AB}.\overline{AC}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{AB}.\overline{AD} - \overline{AC}.\overline{AD} + \overline{AB}.\overline{AC} - \overline{AC}.\overline{AD} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{AD}(\overline{AB} - \overline{AC}) + \overline{AC}(\overline{AB} - \overline{AD}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{AD}.\overline{CB} + \overline{AC}.\overline{DB} = 0.$$

1.42 a) $$\frac{\overline{MA}}{\overline{MC}} = \frac{5}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 3\overline{MA} = 5\overline{MC} = 5(\overline{MA} + \overline{AC})$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\overline{MA} + 5\overline{AC} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\overline{MA} + 5(\overline{AB} + \overline{BC}) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \overline{MA} = -15$$

I là trung điểm của AB $\Rightarrow$ $AI = \frac{AB}{2} = \frac{5}{2}.$

$$\overline{MA} = \overline{MI} + \overline{IA} \quad \Rightarrow \quad \overline{MI} = \overline{MA} - \overline{IA} = -15 + \frac{5}{2} = -\frac{25}{2}$$

$$\overline{MK} = \overline{MA} + \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CK} = -15 + 5 + 1 + \frac{1}{2}\overline{CD} = -\frac{15}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\overline{MI}}{\overline{MK}} = \frac{25}{15} = \frac{5}{3}.$$

b) Tương tự từ $\frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} = -\frac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad 3\overline{NB} + 5\overline{NC} = 8\overline{NB} + 5\overline{BC} = 0$

Suy ra $\overline{NB} = -\frac{5}{8}\overline{BC} = -\frac{5}{8}, \quad \overline{NI} = -\frac{25}{8}, \quad \overline{NK} = \frac{15}{8}$

$$\frac{\overline{NI}}{\overline{NK}} = -\frac{5}{3}.$$

1.43 a) $\overrightarrow{AB} = (-2; 1), \quad \overrightarrow{BA} = (2; -1).$

b) $\overrightarrow{BI} = (x + 1; y - 3) = (3; 0) \quad \Rightarrow \quad I(x; y) = I(2; 3)$

c) $\overrightarrow{KA} = (1 - m; 2 - n) = (1; 1) \quad \Rightarrow \quad K(m; n) = K(0; 1)$

1.44 $\vec{C} = 3\vec{a} - 4\vec{b} = 3(1; -1) - 4(-2; 3) \quad \Rightarrow \quad \vec{C}(11; -15).$

1.45 a) $\vec{C} = x\vec{a} + y\vec{b} = x(-1; 2) + y(2; 3) = (-3; 5)$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} -x + 2y = -3 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \vec{C} = \frac{13}{11}\vec{a} + \frac{5}{11}\vec{b}$$

b) $\vec{C} = (1; 3) = x(2; 1) + y(-3; 4)$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + 4y = 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \vec{C} = \frac{13}{11}\vec{a} + \frac{5}{11}\vec{b}$$

1.46 a) A_1 là trung điểm của BC nên có $A_1\left(1; \frac{5}{2}\right)$.

$$\overrightarrow{AA_1} = \left(1 + 1; \frac{5}{2} - 3\right) = \left(2; -\frac{1}{2}\right)$$

b) I(x; y) là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC :

$$IA = IB = IC \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IC^2 = IB^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (-1-x)^2 + (3-y)^2 = (2-x)^2 + (4-y)^2 \\ (0-x)^2 + (1-y)^2 = (2-x)^2 + (4-y)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad I\left(\frac{11}{14}; \frac{37}{14}\right)$$

c) ABCD là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

D(x; y). $\overrightarrow{DC} = (0 - x; 1 - y) = \overrightarrow{AB} = (2 + 1; 4 - 3)$

$\Rightarrow$ D(−3; 0).

.47 a) $\overrightarrow{AB} = (-2; 1)$, $\overrightarrow{AC} = (4; -2) = -2\overrightarrow{AB}$.

Suy ra A, B, C thẳng hàng.

b) D(x; y). $\overrightarrow{CD} = (x - 7; y + 1) = 2\overrightarrow{AB} = 2(-2; 1)$

$\Rightarrow$ $x - 7 = -4$, $y + 1 = 2$ $\Rightarrow$ D(3; 1).

.48 a) D(x; y) đối xứng với A đối với B có nghĩa **B là trung điểm của AD**.

$$\Rightarrow \quad \frac{x + x_A}{2} = x_B \Leftrightarrow \frac{x+1}{2} = -3 \quad \Rightarrow \quad x = -7$$

$$\frac{y + y_A}{2} = y_B \Leftrightarrow \frac{y}{2} = 2 \quad \Rightarrow \quad y = 4$$

$\Rightarrow$ D(−7; 4).

b) M(x; y)

$$2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) - 3\overrightarrow{MC} = 2[(1 - x; -y) + (-3 - x; 5 - y)] - 3(-x; 3 - y)$$

$$= (-x - 4; -y - 19)$$

$$\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CB} = (-3; -8)$$

$$|2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) - 3\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$$

$$\Leftrightarrow \quad |(x + 4; y + 19)|^2 = |(3; 8)|^2$$

$$\Leftrightarrow \quad (x + 4)^2 + (y + 19)^2 = 3^2 + 8^2 = 73$$

Tập hợp M(x; y) thỏa mãn đẳng thức vectơ là **đường tròn tâm** I(−4; −19) bán kính $R = \sqrt{73}$.

1.49 **a)** M trên Ox có tọa độ M(x; 0)

$\overrightarrow{AB} = (4; -2)$, $\overrightarrow{AM} = (x - 2; 0 - 1)$

A, B, M thẳng hàng khi $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ với $k \neq 0$, tức là phải có :

$$\frac{x-2}{4} = \frac{-1}{-2} \qquad \text{Suy ra} \quad x = 4, \quad M(4; 0).$$

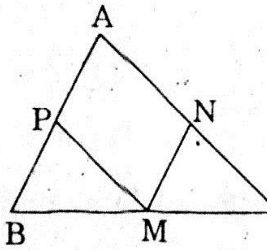
b) N trên trục Oy có tọa độ N(0; y).

$\overrightarrow{AB} = (4; -2)$, $\overrightarrow{AN} = (0 - 2; y - 1)$.

A, B, N thẳng hàng thì $\frac{-2}{4} = \frac{y-1}{-2}$ Suy ra $y = 2$, N(0; 2).

1.50 Ta có : $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{NM} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - x_A = -1 - 1 \\ 1 - y_A = 1 - 9 \end{cases}$

$\Rightarrow$ A(11; 9)



$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PB} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 11 = x_B - 9 \\ 1 - 9 = y_B - 1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ B(7; −7)

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NC} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 11 = x_C - 1 \\ 9 - 9 = y_C - 9 \end{cases} \Rightarrow$ C(−9; 9).

1.51 **a)** $\overrightarrow{AB} = (3; -2)$, $\overrightarrow{AC} = (3; -4)$.

Vì $\frac{3}{3} \neq \frac{-2}{-4}$ nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương. Ba điểm A, B, không thẳng hàng và phân biệt nên chúng là các đỉnh của một ta giác.

b) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$,

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$,

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{2^2} = 2$

Chu vi của tam giác ABC là :

$$AB + BC + CA = \sqrt{13} + 2 + 5 = 7 + \sqrt{13}.$$

1.52 **a)** $AB = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45}$, $AC = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

$BC^2 = 50 = 5 + 45 = AC^2 + AB^2$.

Tam giác ABC vuông tại A.

b) Tâm đường tròn ngoại tiếp là trung điểm I của cạnh huyền BC.

$I\left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

c) $G(x_G; y_G)$, $x_G = \frac{1 - 2 - 1}{3} = -\frac{2}{3}$, $y_G = \frac{2 - 4 + 3}{3} = \frac{1}{3}$

$\overrightarrow{GI} = \left(-\frac{5}{6}; -\frac{5}{6}\right)$.

1.53 **a)** $I\left(\frac{3}{2}; 2\right)$.

b) $IO^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2^2 = \frac{25}{4}$, $IB^2 = \left(-1 - \frac{3}{2}\right)^2 + (2 - 2)^2 = \frac{25}{4} = IO^2$

Vậy tam giác IBO cân đỉnh I.

c) IK = IO = IA = IB. Tứ giác OAKB có các đường chéo AB, OK cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên nó là hình bình hành. Hơn nữa OAKB là hình chữ nhật, vì nội tiếp trong đường tròn tâm I bán kính $IA = \frac{AB}{2}$.

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG I

1.54 **a)** $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG}) = \vec{0}$

b) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}$

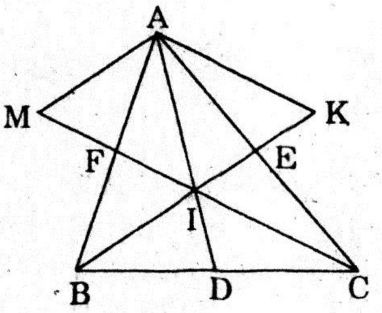
$3\overrightarrow{MG} + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = 3\overrightarrow{MG} + \vec{0}$.

1.55 Gọi I, K lần lượt là trung điểm của BD và EC. Dễ thấy A_1 là trung điểm của IK. Theo qui tắc hình bình hành $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AA_1}$

$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC}) = 2\overrightarrow{AI} + 2\overrightarrow{AK} = 4\overrightarrow{AA_1}.$$

1.56 Tâm đường tròn nội tiếp I là giao điểm các đường phân giác BE và CF. Dựng hình bình hành AMIK (xem hình) ta có : $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IK} + \overrightarrow{IM}$

Theo tính chất của phân giác ta có :



$$\Delta FAM \backsim \Delta FBI \quad \Rightarrow \quad \frac{AM}{IB} = \frac{AF}{FB} = \frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow \quad IK = AM = \frac{b}{a} IB$$

$$\Delta EAK \backsim \Delta ECI \quad \Rightarrow \quad \frac{AK}{IC} = \frac{AE}{CE} = \frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow \quad IM = AK = \frac{c}{a} IC$$

Do các vectơ $\overrightarrow{IM}$ và $\overrightarrow{IN}$, $\overrightarrow{IK}$ và $\overrightarrow{IB}$ trái chiều nhau nên

$$\overrightarrow{IK} = -\frac{b}{a}\overrightarrow{IB}, \qquad \overrightarrow{IM} = -\frac{c}{a}\overrightarrow{IC}.$$

$$\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IK} + \overrightarrow{IM} = -\frac{b}{a}\overrightarrow{IB} - \frac{c}{a}\overrightarrow{IC}$$

$$\Rightarrow \quad a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}.$$

1.57 $$3\overrightarrow{NA} - 2\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = 3(\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BA}) - 2\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\overrightarrow{NB} + 3\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}(3\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$$

Cách xác định N : Trên tia BA dựng BK = 3BA. Khi đó N là trung điểm của CK.

1.58 **a)** $$\vec{a} = 3(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) - (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}) - (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}) - (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD})$$

$$= (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD}) = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DA} = 2\overrightarrow{CA}$$

không phụ thuộc M.

b) $$\vec{b} = 4(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) - 3(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}) + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC} - 2(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD})$$

$$= 4\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - 3\overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OD}$$ không phụ thuộc M.

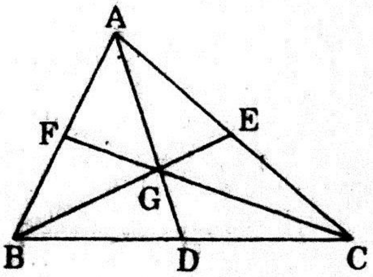
1.59 a) $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

b) $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KD} = \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{KD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{KD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

1.60 Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.



Ta có : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$\overrightarrow{BE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BG}, \quad \overrightarrow{CF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CG}$.

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$

$= 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = -2\frac{2}{3}\overrightarrow{BE} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CF} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{BE} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CF}$

b) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CF} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BE}$.

c) $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GC} = -(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) - \overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GB} - 2\overrightarrow{GC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BE} + \frac{4}{3}\overrightarrow{CF}$.

1.61 a) $\vec{0} = 2\overrightarrow{KA} + 5\overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KC} = 2(\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB}) + 3(\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC}) = \vec{0}$

$= 2.2\overrightarrow{KM} + 3.2\overrightarrow{KN} = 0$

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{KM}$ và $\overrightarrow{KN}$ cùng phương, tức là K, M, N thẳng hàng.

b) $2\overrightarrow{KA} + 5\overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KC} = 2(\overrightarrow{KI} + \overrightarrow{IA}) + 5(\overrightarrow{KI} + \overrightarrow{IB}) + 3(\overrightarrow{KI} + \overrightarrow{IC}) = \vec{0}$

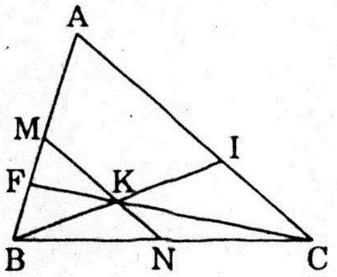
$= 10\overrightarrow{KI} + 5\overrightarrow{IB} + \underbrace{(2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IC})}_{\vec{0}} = \vec{0}$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{IK}$

$\Rightarrow$ K là trung điểm của BI.

1.62 **a)** AD là đường kính, do đó $\widehat{ABD} = \widehat{ACD} = 90^0$.

Suy ra BH // DC, CH // BD, CDBH là hình bình hành.



Do đó $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{DC}$.

OM là đường trung bình của tam giác DAH.

Suy ra $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$.

b) CDBH là hình bình hành nên

$$\overrightarrow{HA} + (\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}) = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HD} = 2\overrightarrow{HO}$$

(HO là trung tuyến của ΔHAD).

c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = (\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HA}) + (\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HB}) + (\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HC})$

$$= 3\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 3\overrightarrow{OH} + 2\overrightarrow{HO} = \overrightarrow{OH}$$

d) G là trọng tâm của tam giác ABC nên :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

$\Leftrightarrow \quad 3\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OH} = \vec{0} \quad \Rightarrow$ G, O, H thẳng hàng.

1.63 P, A, D thẳng hàng $\Rightarrow \quad \overrightarrow{PD} = k\overrightarrow{PA}$

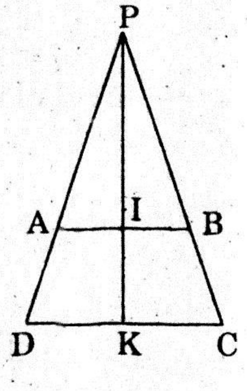
P, B, C thẳng hàng $\Rightarrow \quad \overrightarrow{PC} = m\overrightarrow{PB}$

P, I, K thẳng hàng $\Rightarrow \quad \overrightarrow{PK} = n\overrightarrow{PI}$, $\quad k, m, n \in R$

$$\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = k\overrightarrow{PA} + m\overrightarrow{PB} = 2\overrightarrow{PK}$$

$$\Rightarrow \quad 2n\overrightarrow{PI} = k\overrightarrow{PA} + m\overrightarrow{PB}$$

$$2n\left(\frac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}}{2}\right) = k\overrightarrow{PA} + m\overrightarrow{PB}$$



$$\Leftrightarrow \quad (k - n)\overrightarrow{PA} + (m - n)\overrightarrow{PB} = \vec{0} \qquad (1)$$

Vì $\overrightarrow{PA}$ và $\overrightarrow{PB}$ không cùng phương nên (1) xảy ra chỉ khi

$$k - n = 0 \quad \text{và} \quad m - n = 0 \quad \Rightarrow \quad k = m = n.$$

Do đó $\dfrac{PC}{PB} = \dfrac{PD}{PA} = k \quad \Rightarrow \quad AB \parallel CD.$ ABCD là hình thang.

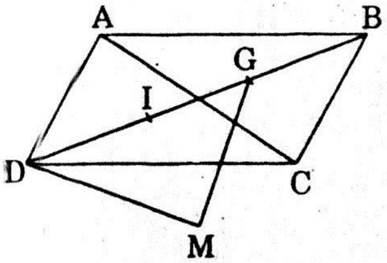
1.64 Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, ta có :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 3\,\overrightarrow{MD} = 3\,\overrightarrow{MG} + 3\,\overrightarrow{MD}$$

$$3(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MD}) = k\,\overrightarrow{MI}$$

Chọn I là trung điểm của DG, ta có :

$$6\,\overrightarrow{MI} = k\,\overrightarrow{MI} \quad \Rightarrow \quad k = 6.$$



1.65 **a)** $3\overline{MA} + 5\overline{MB} = 3(\overline{MO} + \overline{OA}) + 5(\overline{MO} + \overline{OB}) = 0$

$\Rightarrow \quad 8\overline{OM} = 3\overline{OA} + 5\overline{OB} = 3(-2) + 5.3 \quad \Rightarrow \quad \overline{OM} = \dfrac{9}{8}.$

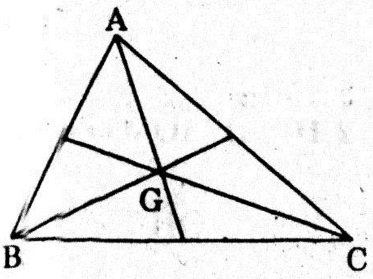
Tọa độ là $\dfrac{9}{8}$.

b) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} - 2\,\overrightarrow{IA}$.

1.66 **a)** $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 3\,\overrightarrow{AG}$

$\Rightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - (3\,\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AC}) = 2\,\overrightarrow{AC} - 3\,\overrightarrow{AG}$.



b) M(x, y)

$\overrightarrow{AM} + 2\,\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad (x + 1; y - 2) + 2(4; 3) + (1; 4) = (0; 0)$

$\Rightarrow \quad (x + 10; y + 8) = (0, 0) \Rightarrow M(-10; -8).$

c) $G : \left(\dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}; \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}\right) = \left(\dfrac{-1 + 2 + 3}{3}; \dfrac{2 + 1 + 5}{3}\right)$

$= \left(\dfrac{4}{3}; \dfrac{8}{3}\right)$

G' đối xứng với G qua A có nghĩa là A là trung điểm của GG'.

Do đó : $x_{G'} = 2x_A - x_G = -2 - \frac{4}{3} = -\frac{10}{3}$.

$y_{G'} = 2y_A - y_G = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$.

$G'\left(-\frac{10}{3}; \frac{4}{3}\right)$

d) $AB = \sqrt{(2+1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{10}$

$AC = \sqrt{(3+1)^2 + (5-2)^2} = 5$

$BC = \sqrt{(3-2)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{17}$.

Chu vi tam giác ABC : $2p = 5 + \sqrt{10} + \sqrt{17}$ đv.

Chương II

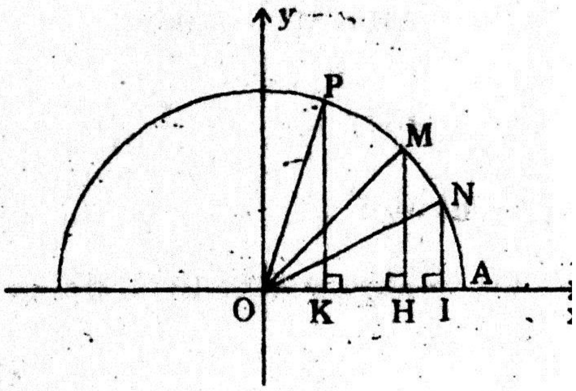
TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ VÀ ỨNG DỤNG

§1. Giá trị lượng giác của một góc

2.9 a) $A = \frac{4\sqrt{3}+1}{4}$ b) $B = -\frac{9}{8}$

c) $B = \frac{33 - 12\sqrt{3}}{4}$ d) $D = \frac{a^2 + b^2}{a - b}$ $(a \neq b)$.

2.10 a) $\widehat{AOM} = 45^0$,



$\overline{OH} = \cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\overline{HM} = \sin 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$0^0 < x^0 = \widehat{AON} < \widehat{AOM} = 45^0$.

$\sin x = \overline{IN} < \overline{HM} = \sin 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos x = \overline{OI} > \overline{OH} = \cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin x < \frac{\sqrt{2}}{2} < \cos x$.

b) Chứng minh tương tự câu a).

2.11 **a)** $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \quad \Rightarrow \quad \cos x = \sqrt{\dfrac{1}{1 + \tan^2 x}} = \sqrt{\dfrac{1}{1+4}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{2}.$$

b) Do $90^0 < x < 180^0$ nên $\cos x < 0$,

$$\cos x = -\sqrt{1 - \sin^2 x} = -\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\cot x = -2\sqrt{2}.$$

2.12 **a)** $90^0 < x < 180^0 \quad \Rightarrow \quad \cos x < 0, \tan x < 0, \cot x < 0, \sin x > 0.$

$$\tan x = -\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} - 1} = -\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 - 1} = -\frac{3}{4}.$$

$$P = \frac{1 - \dfrac{3}{4}}{1 + \dfrac{3}{4}} = \frac{1}{7}.$$

b) $\sin x = \tan x \, . \, \cos x = \left(-\dfrac{3}{4}\right) . \left(-\dfrac{4}{5}\right) = \dfrac{3}{5}.$

$$Q = \left(\frac{3}{5}\right)^3 + \left(-\frac{4}{5}\right)^3 + \frac{3}{4} = \frac{227}{500}.$$

2.13 $\sin x + \cos x = \dfrac{1}{3}$

$$\Rightarrow \quad (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x = \frac{1}{9}$$

$$2\sin x \cos x = \frac{1}{9} - 1 = -\frac{8}{9} \quad \Rightarrow \quad \cos x < 0$$

$$-\cos x\sqrt{1 - \cos^2 x} = -\frac{4}{9} \quad \Rightarrow \quad \cos^2 x(1 - \cos^2 x) = \frac{16}{81}$$

$$\Rightarrow \quad \cos^4 x - \cos^2 x + \frac{16}{81} = 0 \qquad \cos^2 x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{64}{81}}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{17}}{18}$$

$$\Rightarrow \quad \cos x = -\sqrt{\frac{9 \pm \sqrt{17}}{18}}\ , \qquad \sin x = \sqrt{\frac{9 \mp \sqrt{17}}{18}}$$

$$\tan x = \frac{-9 \pm \sqrt{17}}{8} \qquad \cot x = \frac{-8}{9 \mp \sqrt{17}}$$

2.14 **a)** $A = \dfrac{1 + \tan^2 x - 2\tan x}{4\tan^2 x} - \dfrac{1}{4}(1 + \tan^2 x)(1 + \cot^2 x)$

$= \dfrac{1 + \tan^2 x - 2\tan x - \tan^4 x - 2\tan^2 x - 1}{4\tan^2 x}$

$= -\dfrac{\tan^3 x + \tan x - 2}{4\tan x}$

b) $B = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x + 2\sin x \cos x} = |\sin x + \cos x|$

c) $C = (\tan 10^0 . \tan 80^0) . (\tan 20^0 . \tan 70^0) \ \dots \ (\tan 40^0 . \tan 50^0) = 1$

d) $D = (\cos 20^0 + \cos 160^0) + (\cos 40^0 + \cos 140^0) + (\cos 60^0 + \cos 120^0) +$

$+ (\cos 80^0 + \cos 100^0) + \cos 180^0$

$= \cos 180^0 = -1$

2.15 **a)** $VT = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x) = \sin^2 x - \cos^2 x$

$= \sin^2 x - (1 - \sin^2 x) = 2\sin^2 x - 1$

$= VP.$

b) Ta có :

$1 = (\cos^2 x + \sin^2 x)^4$

$1 = (\cos^4 x + \sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x)^2$

$= \cos^8 x + \sin^8 x + 6\sin^4 x \cos^4 x + 4\sin^2 x \cos^2 x(\cos^4 x + \sin^4 x)$

$= \cos^8 x + \sin^8 x - 2\sin^4 x \cos^4 x +$

$+ 4\sin^2 x \cos^2 x(\cos^4 x + \sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x)$

$= \cos^8 x + \sin^8 x - 2\sin^4 x \cos^4 x + 4\sin^2 x \cos^2 x(\cos^2 x + \sin^2 x)^2$

$$\Rightarrow \quad \sin^8x+\cos^8x = 1+2\sin^4x\cos^4x-4\sin^2x\cos^2x$$

$$= 1+2\sin^2x\cos^4x(1-\cos^2x)-4\sin^2x\cos^2x$$

$$= 1+2\sin^2x\cos^4x-2\sin^2x\cos^6x-4\sin^2x\cos^2x$$

$$= VP.$$

§2. Tích vô hướng của hai vectơ

2.25 **a)** • $\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})^2 = AC^2+AB^2-2\,\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{AC^2+AB^2-BC^2}{2} = \frac{8^2+5^2-7^2}{2} = 20$$

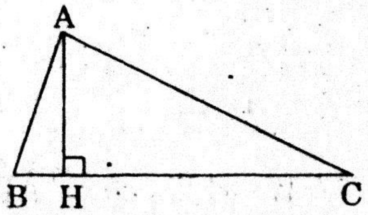
Tính tương tự ta được : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}(7^2+8^2-5^2) = 44.$

- $2\,\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC} = 2AB.AC\cos A \quad \Rightarrow \quad \cos A = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB.AC} = \frac{20}{5.8} = \frac{1}{2}.$

- **Tính tương tự ta được :** $\cos B = \frac{BA^2+BC^2-AC^2}{2BA.BC} = \frac{1}{7}$

$$\cos C = \frac{CA^2+CB^2-AB^2}{2CA.CB} = \frac{44}{8.7} = \frac{11}{14}.$$

b) Theo tính chất của hình chiếu



$$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CB} = CH.CB$$

$$\Rightarrow \quad CH = \frac{\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}}{CB} = \frac{44}{7}$$

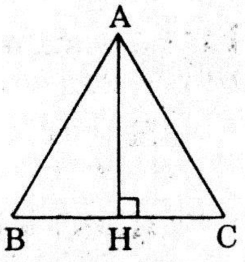
$$AH = \sqrt{CA^2-CH^2} = \sqrt{8^2-\left(\frac{44}{7}\right)^2} \approx 4{,}95$$

2.26 **a)** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HC} = -\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{HC} = -\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BH} = -\frac{a^2}{4}.$

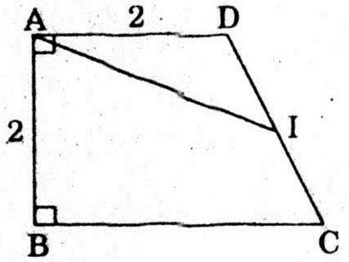
b) $(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})(2\,\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}) =$

$= 2\,\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{AB}-BC^2 = 2\,\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}-BC^2$

$= 2a^2.\frac{1}{2}-a^2 = 0$



2.27 a) • $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD})$



$$= \overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{BD}$$

$$= 2.3\cos 90^0 - 2.2\sqrt{2}\,.\cos 45^0$$

$$= -4$$

• $\overrightarrow{BD}\,.\,\overrightarrow{BC} = 2\sqrt{2}.3.\cos 45^0 = 6$

• $\overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}\,.\,\overrightarrow{BD}$

$$= -2.2\sqrt{2}.\cos 45^0 + 3.2\sqrt{2}.\cos 45^0 = 2$$

b) $\overrightarrow{AI}\,.\,\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\,.\,\overrightarrow{BD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{BD}$

$$= \frac{1}{2}.\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\,.\,\overrightarrow{BD} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}).\overrightarrow{BD}$$

$$= \frac{1}{3}.3.2\sqrt{2}\cos 45^0 - \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{BD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\,.\,\overrightarrow{BD} = 3$$

2.28 $A = (\vec{a} - 3\vec{b}).(2\vec{a} + \vec{b}) = 2|\vec{a}|^2 - 5\vec{a}\,.\,\vec{b} - 3|\vec{b}|^2$

$(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a}\,.\,\vec{b} = 4^2 \quad \Rightarrow \quad \vec{a}\,.\,\vec{b} = \frac{3}{2}.$

$$\Rightarrow \quad A = -\frac{53}{2}$$

2.29 a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2 - 1;\ 6 - 2) = (-3;\ 4), \qquad \overrightarrow{AC} = (3;\ 0)$

$$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = (-3).3 + 4.0 = -9$$

$$\cos A = \frac{\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}}{AB\,.\,AC} = \frac{-9}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2}\sqrt{3^2 + 0^2}} = -\frac{3}{5}$$

b) Giả sử H(x, y)

$\overrightarrow{AH} = (x - 1;\ y - 2), \qquad \overrightarrow{BC} = (6;\ -4)$

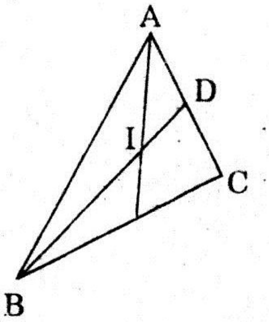
$\overrightarrow{AH}\,.\,\overrightarrow{BC} = 6(x - 1) - 4(y - 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 6x - 4y = -2.$

Mặt khác $\overrightarrow{BH}$ và $\overrightarrow{BC}$ là hai vectơ đồng phương, ta có :

$$\overrightarrow{BH} = k\,\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \frac{x+2}{6} = \frac{y-6}{-4} \Leftrightarrow 2x + 3y = 14$$

Suy ra $H\left(\frac{25}{13}; \frac{44}{13}\right)$.

2.30 **a)** Giả sử C(x; y) ta có :



$$\left.\begin{aligned} x_G &= \frac{4}{3} = \frac{2-3+x}{3} \\ y_G &= \frac{2}{3} = \frac{6-4+y}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow C(5; 0).$$

$$\overrightarrow{CA} = (-3; 6), \quad \overrightarrow{CB} = (-8; -4)$$

$$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = (-3)(-8) + 6(-4) = 0 \Rightarrow CA \perp CB.$$

Tam giác ABC vuông tại C.

b) Theo tính chất của phân giác :

$$\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} = \frac{\sqrt{5^2+10^2}}{\sqrt{8^2+4^2}} = \frac{5\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = \frac{5}{4}$$

Ta có $D(x; y)$, $\overrightarrow{DA} = (2 - x; 6 - y)$

$$\overrightarrow{DC} = (5 - x; 0 - y)$$

$$\overrightarrow{DA} = -\frac{5}{4}\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow 2 - x = -\frac{5}{4}(5 - x), \quad 6 - y = -\frac{5}{4}(0 - y)$$

$$\Rightarrow D\left(\frac{11}{3}; \frac{8}{3}\right)$$

c) Gọi $I(x_I; y_I)$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Theo tính chất của phân giác $\frac{\overline{ID}}{\overline{IB}} = -\frac{AD}{AB} = -\frac{\sqrt{\left(\frac{11}{3}-2\right)^2 + \left(\frac{8}{3}-6\right)^2}}{\sqrt{(-3-2)^2 + (-4-6)^2}}$

$$\overline{ID} = -\frac{1}{3}\overline{IB} \Leftrightarrow \left(\frac{11}{3} - x_I; \frac{8}{3} - y_I\right) = -\frac{1}{3}(-3 - x_I; -4 - y_I)$$

$$\Rightarrow I(2; 1).$$

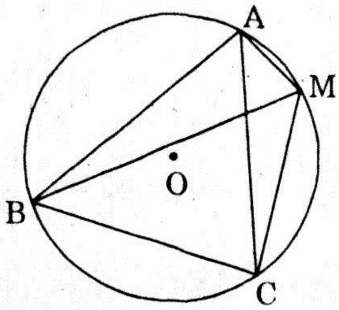
2.31 $T = MA^2 + MB^2 + MC^2 = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC})^2$

$= 3MO^2 + OA^2 + OB^2 + OC^2 +$

$+ 2\overrightarrow{MO}.(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$

$= 6OA^2$ (vì $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$)

Do đó T không phụ thuộc vào M.



2.32 a) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MH} = (\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BM})(\overrightarrow{CH} - \overrightarrow{CM})$

$= \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{CM}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CM}.\overrightarrow{BM}$

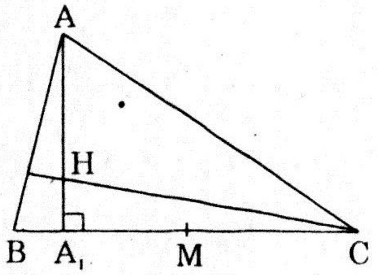
$CH \perp BA$, do đó $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{BA} = 0$

- $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CM}.\overrightarrow{CA_1}$ (hình chiếu)
- $\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BA_1}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{CM}.\overrightarrow{CA_1} + \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{CM}.\overrightarrow{BM}$

$= \overrightarrow{CM}.\overrightarrow{CA_1} + \overrightarrow{CM}.\overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{CM}.\overrightarrow{BM}$

$= \overrightarrow{CM}.\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CM}^2 = \overrightarrow{CM}.\overrightarrow{MB} = \dfrac{BC}{2}.\dfrac{BC}{2} = \dfrac{BC^2}{4}.$



b) $AH^2 = (\overrightarrow{MH} - \overrightarrow{MA})^2 = MH^2 + MA^2 - 2\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MA}$

$= MH^2 + MA^2 - 2\dfrac{BC^2}{4} = MH^2 + MA^2 - \dfrac{BC^2}{2}$

$\Rightarrow MH^2 + MA^2 = AH^2 + \dfrac{BC^2}{2}.$

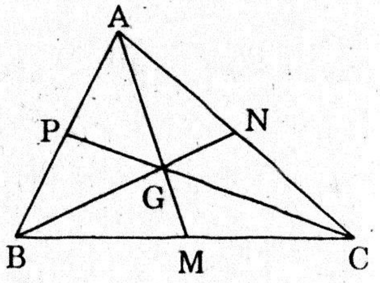
2.33 • $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \dfrac{1}{2}(AC^2 - AB^2)$ (1)

Tương tự, ta có :

$\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{CA} = \dfrac{1}{2}(BA^2 - BC^2)$ (2)

$\overrightarrow{CP}.\overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{2}(CB^2 - CA^2)$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra đpcm.



2.34 $T = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{GA}$

$$= (\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GM})\overrightarrow{GB} + (\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GM}).\overrightarrow{GC} + (\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GM}).\overrightarrow{GA}$$

$$= \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GM}\underbrace{(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})}_{\vec{0}}$$

$$= \overrightarrow{GA}(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + \overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}$$

không phụ thuộc M và không đổi vì A, B, C, G cố định.

2.35 **a)** $MA^2 + MC^2 = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC})^2$

$$= 2MO^2 + OA^2 + OC^2 + 2\overrightarrow{MO}.\underbrace{(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC})}_{\vec{0}}$$

$$= 2MO^2 + OA^2 + OC^2$$

$MB^2 + MD^2 = 2MO^2 + OB^2 + OD^2.$

Vì $OA^2 + OC^2 = OB^2 + OD^2$, suy ra $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.

b) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC})$

$$= MO^2 + 2\overrightarrow{MO}\underbrace{(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC})}_{\vec{0}} + \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC} = MO^2 - OA^2.$$

Tương tự, ta có : $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD} = MO^2 - OB^2.$

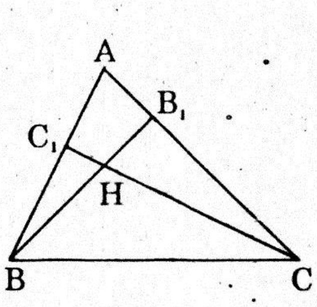
Suy ra $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}.$

c) **VT** $= MA^2 + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD} = MA^2 + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}$

$$= \overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}) = 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MO}.$$

2.36 Gọi H là giao điểm của hai đường cao BB_1 và CC_1.

Xét tích vô hướng :



$$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB}$$

(vì $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CA} = 0$.

Tương tự, $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB} = 0$).

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AH}.(\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HB}) + \overrightarrow{BH}.(\overrightarrow{HA} - \overrightarrow{HC}) + \overrightarrow{CH}.(\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HA})$

$= \overrightarrow{AH}(\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{CH}) + \overrightarrow{BH}(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AH}) + \overrightarrow{CH}(\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HB}) = 0.$

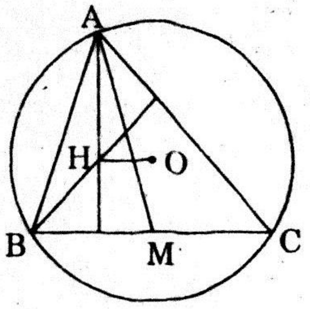
$\Rightarrow \quad AH \perp BC.$

Suy ra ba đường cao của tam giác đồng quy tại H.

2.37 **a)** Xét tích vô hướng : $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})$ (1)

Từ giả thiết $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

suy ra $\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$



Thay vào (1) thì được

$$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC})(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})$$

$$= OC^2 - OB^2 = 0$$

Vậy $AH \perp BC$.

Làm tương tự ta có : $BH \perp AC$ và $CH \perp AB$. Điều đó nghĩa là H là trực tâm của ΔABC.

b) Theo tính chất của đường tròn $OM \perp BC$.

Để $OH \perp AM$ phải có $\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{AM} = 0$

$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})\overrightarrow{AM} = 0$

$\Leftrightarrow \quad (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = 0$

$\Leftrightarrow \quad (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}).(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = 0$

$\Leftrightarrow \quad (3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = 3\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{AC} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 = 0$

Theo định lí hình chiếu thì

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB}.\frac{\overrightarrow{AB}}{2} = -\frac{AB^2}{2}, \qquad \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{AC} = -\frac{AC^2}{2}$$

Suy ra : $0 = \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{AM} = -\frac{3}{2}AB^2 - \frac{3}{2}AC^2 + AB^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

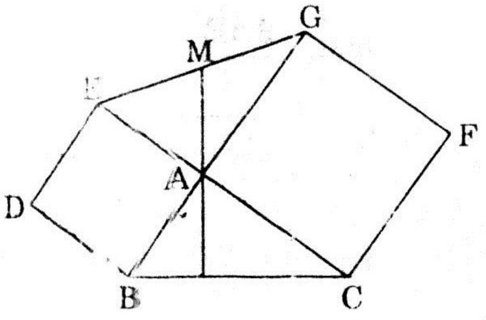
$\Leftrightarrow \quad 4\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2$

$$\Leftrightarrow \quad 2(AB^2 + AC^2) - 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = AB^2 + AB^2$$

$$\Leftrightarrow \quad AB^2 + AC^2 = 2BC^2 \qquad (2)$$

Hệ thức (2) chính là điều kiện cần tìm.

2.38 Ta có : $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AG})$



$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AM}\,.\,\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AG}).(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$$

$$= \frac{1}{2}[\overrightarrow{AE}\,.\,\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE}\,.\,\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AG}\,.\,\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG}\,.\,\overrightarrow{AC}]$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\,.\,\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AG}\,.\,\overrightarrow{BA}$$

(vì $AE \perp BA$, $\overrightarrow{AE}\,.\,\overrightarrow{BA} = 0$, $AG \perp AC$, $\overrightarrow{AG}\,.\,\overrightarrow{AC} = 0$)

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM}\,.\,\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}AE\,.\,AC\cos(\widehat{EAC}) + \frac{1}{2}AG\,.\,AB\cos(180^0 - \widehat{BAG})$$

Ta lại có $AE = AB$; $AG = AC$ và $\widehat{EAC} = \widehat{BAG}$ nên

$$\overrightarrow{AM}\,.\,\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}AE\,.\,AC[\cos(\widehat{EAC}) + \cos(180^0 - \widehat{BAG})]$$

$$= \frac{1}{2}AE\,.\,AC[\cos(\widehat{EAC}) - \cos(\widehat{BAG})] = 0.$$

Vậy $AM \perp BC$.

2.39 $$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}\,.\,\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC}\,.\,\overrightarrow{DA} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD}(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DA}) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{CD}(\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{DC}.(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC})$$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ hoặc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. ABCD là hình bình hành.

2.40 **a)** Lấy điểm I trên AB ta có :

$$2MA^2 + MB^2 = 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2$$

$$= 3MI^2 + 2IA^2 + IB^2 + 2\overrightarrow{MI}.(2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB})$$

Chọn I trên AB sao cho $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ khi đó ta có I cố định với

$$IA=\frac{AB}{3},\quad IB=\frac{2AB}{3}\quad \text{và}\quad MI^2=\frac{1}{3}\left(k-\frac{2}{3}AB^2\right).$$

Nếu $\frac{2AB^2}{3}\le k$ thì quỹ tích M là đường tròn tâm I bán kính $r=\frac{1}{3}\sqrt{3k-2AB^2}$.

b) Làm tương tự câu a). Chọn điểm K sao cho $\overrightarrow{KA}-3\overrightarrow{KB}=\vec{0}$.

Nếu $k\le\frac{3AB^2}{2}$ thì quỹ tích M là đường tròn tâm K bán kính $r=\frac{1}{2}\sqrt{3AB^2-2k}$.

2.41 **a)** Gọi I là trung điểm của AB thì có :

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})=k$$

$$=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA})=MI^2-IA^2=k$$

$$\Rightarrow\quad MI^2=k+IA^2=k+\frac{AB^2}{4}.$$

Nếu $k+\frac{AB^2}{4}\ge 0$ tập hợp các điểm M cần tìm là đường tròn tám I

bán kính $r=\sqrt{k+\frac{AB^2}{4}}$.

b) $MA^2+\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$

$$=\overrightarrow{MA}.(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})=2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MI}=0\quad\Rightarrow\quad MA\perp M$$

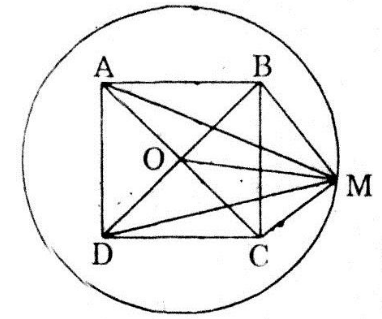
Do A cố định, I trung điểm của AB cố định, MI ⊥ MA nên quỹ tích (tập hợp) các điểm M thỏa mãn hệ thức đã cho là đường tròn đường kính AI.

2.42 **a)** $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}=(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC})+(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}).(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OD}$

$$=MO^2+\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{MO}\underbrace{(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})}_{\vec{0}}+MO^2+\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{MO}\underbrace{(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}}_{\vec{0}}$$

$$=2MO^2-2OA^2=a^2$$

$$\Rightarrow\ MO^2 = \frac{a^2}{2} + OA^2 = \frac{a^2}{2} + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = a^2$$



Vậy quỹ tích là đường tròn tâm O bán kính bằng a.

b) $MA^2 - MB^2 + MC^2 =$

$$= (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA})^2 - (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB})^2 + (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC})^2$$

$$= MD^2 + \underbrace{(DA^2 - DB^2 + DC^2)}_{0} + 2\overrightarrow{MD}.\underbrace{(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB})}_{0}$$

$$\Rightarrow\quad MA^2 - MB^2 + MC^2 = MD^2 = a^2.$$

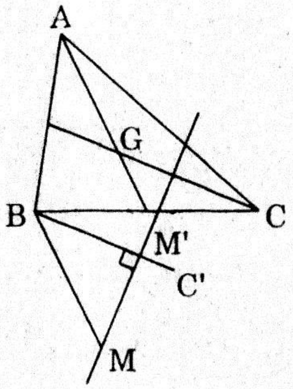
- Vậy tập hợp M thỏa mãn hệ thức đã cho là đường tròn tâm D bán kính bằng cạnh a của hình vuông.

2.43 **a)** $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MB}.(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MG}) = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{GC} = AB^2$

Vẽ vectơ $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{GC}$. Gọi M' là hình chiếu vuông góc của M trên đường thẳng BC'. Theo tính chất của phép chiếu vuông góc ta có :

$$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{BM'} = AB^2$$

Suy ra quỹ tích M là đường thẳng vuông góc với BC' tại điểm M' là điểm trên BC' cách B khoảng cách $d = \dfrac{AB^2}{BM'}$.



b) Gọi I, K là hai điểm nào đó trên AB thì

$$2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) - 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = -\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB}$$

$$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KA} + 2(\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KB}) = 3\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB}$$

Ta chọn I và K sao cho $2\overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB} = \vec{0}$, $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \vec{0}$.

Khi đó : $(2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}).(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}) = \overrightarrow{IM}.3\overrightarrow{MK} = 0$

$$\Rightarrow\quad \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{MK} = 0 \quad\Rightarrow\quad \overrightarrow{IM} \perp \overrightarrow{MK}.$$

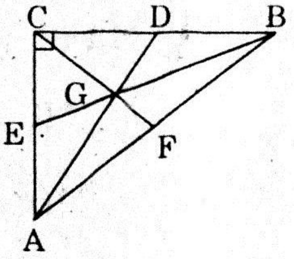
Vậy tập hợp (quỹ tích) các điểm M là đường tròn đường kính IK.

2.44 $MA^2 + MB^2 + MC^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2$

$$= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 \qquad (1)$$

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{4}{9}(AC^2 + \frac{BC^2}{4} + BC^2 + \frac{AC^2}{4} + CF^2)$$

$$AB = a \ ; \quad CF = \frac{a}{2} \ ; \quad AC = BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$



$$\Rightarrow \quad GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{2a^2}{3}$$

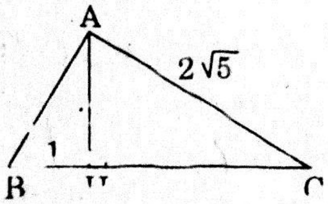
$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3a^2 = 3MG^2 + \frac{2a^2}{3}$$

$$\Rightarrow \quad MG = \frac{a\sqrt{7}}{3}.$$

Tập hợp các điểm M thỏa mãn hệ thức đã cho là đường tròn tâm G (trọng tâm của tam giác ABC) bán kính bằng $\frac{a\sqrt{7}}{3}$.

§3. Hệ thức lượng giác trong tam giác

2.56 Ta đặt CH = x thì có :



$$AC^2 = CH.BC$$

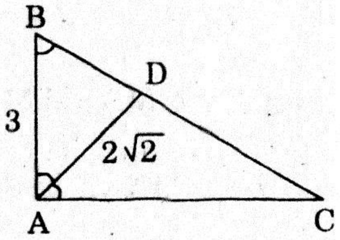
$$(2\sqrt{5})^2 = x(x+1) \quad \Rightarrow \quad x = 4$$

$$BC = CH + BH = 4 + 1 = 5$$

$$AB = \sqrt{BH.BC} = \sqrt{5}$$

$$AH = \sqrt{BH.CH} = \sqrt{1.4} = 2$$

2.57 $\widehat{BAD} = \widehat{DAC} = 45^0$



$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB.AD\cos 45^0$$

$$= 9 + 8 - 2.3.2\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = 5$$

$$BD = \sqrt{5}$$

$$\cos B = \frac{BA^2 + BD^2 - AD^2}{2BA.BD} = \frac{9+5-8}{2.3.\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad \Rightarrow \quad \hat{B} = 63^0 26'$$

$$\hat{C} = 90^0 - \hat{B} = 26^0 34'$$

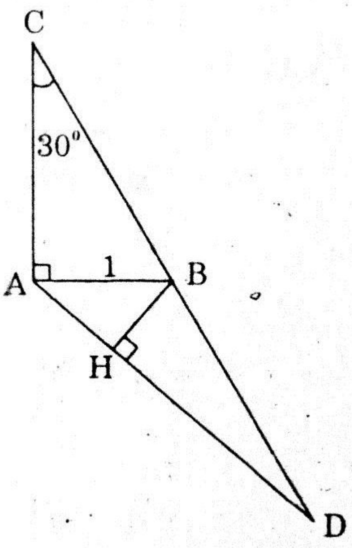
Theo định lí Sin trong tam giác ADC ta có :

$$\frac{AD}{\sin C} = \frac{DC}{\sin 45^0} \quad \Rightarrow \quad DC = \frac{AD.\sin 45^0}{\sin C} = \frac{2\sqrt{2}\,\sqrt{2}}{2\frac{\sqrt{5}}{5}} = 2\sqrt{5}$$

$$BC = BD + DC = \sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{45 - 9} = 6.$$

2.58 Ta có : $\sin C = \sin 30^0 = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{BC} = \frac{1}{2}$



$$\Rightarrow \quad BC = 2, \quad BD = 2, \quad \widehat{ABD} = 120^0$$

$$AD^2 = BA^2 + BD^2 - 2BA.BD\cos\widehat{ABD}$$

$$= 1 + 4 + 2.1.2.\frac{1}{2} = 7$$

$$AD = \sqrt{7}.$$

Theo công thức tính diện tích

$$S = \frac{1}{2}BA.BD\sin 120^0 = \frac{1}{2}AD.BH$$

$$\Rightarrow \quad BH = \frac{BA.BD\sin 120^0}{AD} = \frac{2\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$$

2.59 Theo công thức Hêrông và theo giả thiết ta có :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{1}{4}(a+b-c)(a-b+c) = (p-c)(p-b)$$

$$\Rightarrow \quad p(p-a)(p-b)(p-c) = (p-c)^2(p-b)^2$$

$$\Rightarrow \quad p(p-a) = (p-b)(p-c)$$

$$\Rightarrow \quad (a+b+c)(b+c-a) = (a-b+c)(a+b-c)$$

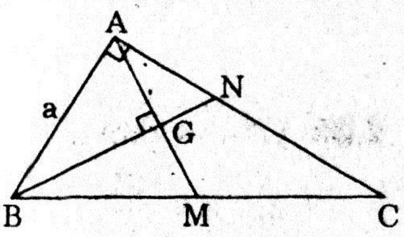
$$\Rightarrow \quad (b+c)^2 - a^2 = a^2 - (b-c)^2$$

$$\Rightarrow \quad a^2 = b^2 + c^2.$$

Tam giác ABC vuông đỉnh A.

2.60 Giao điểm của AM và BN là trọng tâm G của tam giác. Ta có :

$$BG = \frac{2}{3}BN$$



Trong tam giác vuông ABN ta có :

$$a^2 = AB^2 = BG.BN = \frac{2}{3}BN.BN$$

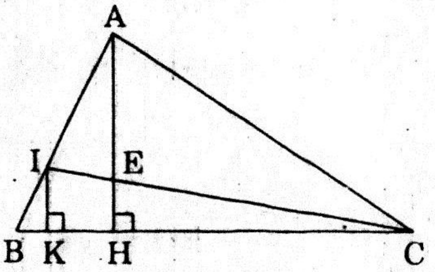
$$\Rightarrow \quad BN = a\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

$$AC = 2AN = 2\sqrt{BN^2 - AB^2} = 2\sqrt{\frac{3a^2}{2} - a^2} = a\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = a\sqrt{3}.$$

2.61 Dễ thấy $AI = 2$, $BI = 1$, $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 5$.

Kẻ IK vuông góc với BC tại K ta có :



$$\frac{CE}{CI} = \frac{CH}{CK} \Rightarrow CE = \frac{CH.CI}{CK} \quad (*)$$

$$CI = \sqrt{AC^2 + AI^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$$

$$CH = \frac{AC^2}{BC} = \frac{4^2}{5} = \frac{16}{5}$$

$$\frac{BK}{BH} = \frac{BI}{BA} = \frac{1}{3} \Rightarrow BK = \frac{1}{3}BH = \frac{1}{3}\left(5 - \frac{16}{5}\right) = \frac{3}{5}$$

$$CK = BC - BK = 5 - \frac{3}{5} = \frac{22}{5}.$$

Thay vào (*) ta được : $CE = \dfrac{CH.CI}{CK} = \dfrac{\frac{16}{5}.2\sqrt{5}}{\frac{22}{5}} = \dfrac{16\sqrt{5}}{11}$.

2.62 Ta có : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A = 5^2 + 7^2 - 2.5.7.\frac{3}{5} = 32$

$$BC = 4\sqrt{2}$$

Diện tích tam giác : $S = \frac{1}{2}AC.AB\sin A = \frac{1}{2}.7.5\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = 14.$

Đường cao $AH = \dfrac{2S}{BC} = \dfrac{28}{4\sqrt{2}} = \dfrac{7\sqrt{2}}{2}.$

Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác :

$$R = \frac{BC}{2\sin A} = \frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2.\frac{4}{5}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

2.63 Chu vi tam giác : $2p = a + b + c = 7 + 8 + 6 = 21.$

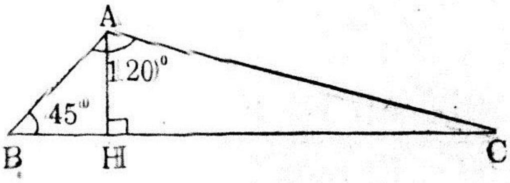
$$p - a = \frac{21}{2} - 7 = \frac{7}{2}, \quad p - b = \frac{21}{2} - 8 = \frac{5}{2}, \quad p - c = \frac{21}{2} - 6 = \frac{9}{2}.$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{21}{2}.\frac{7}{2}.\frac{5}{2}.\frac{9}{2}} = \frac{21\sqrt{15}}{4}$$

Đường cao $AH = \dfrac{2S}{BC} = \dfrac{21\sqrt{15}}{2} : 7 = \dfrac{3\sqrt{15}}{2}$.

Trung tuyến $AM = \sqrt{\dfrac{AC^2 + AB^2}{2} - \dfrac{BC^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{2(8^2 + 6^2) - 7^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{151}}{2}$.

2.64 Theo định lí Sin :



$$BC = a = 2R\sin A = 4.\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$AC = b = 2R\sin B = 4.\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$AH = h_a = b\sin C = 2\sqrt{2}\sin 15^0 = 2\sqrt{2}.\frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$$

$$c = AB = AH\sqrt{2} = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}\sqrt{2} = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

$$h_a = AH = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$$

$$h_b = \frac{2S}{b} = \frac{a.h_a}{b} = \frac{2\sqrt{3}.\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}} = \sqrt{6 - 3\sqrt{3}}$$

$$h_c = \frac{a.h_a}{c} = \frac{2\sqrt{3}\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2 - \sqrt{3}}} = \sqrt{6}.$$

2.65

$$m_a^2 = \frac{1}{2}\left(b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}\right)$$

$$m_b^2 = \frac{1}{2}\left(c^2 + a^2 - \frac{b^2}{2}\right)$$

$$m_c^2 = \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

2.66 Gọi S là diện tích tam giác ABC ta có :

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}c.h_c \quad \Rightarrow \quad h_c = \frac{ab\sin C}{c}$$

$$h_c = \frac{ab}{\dfrac{c}{\sin C}} = \frac{ab}{2R}$$

Tương tự ta có $h_b = \dfrac{ac}{2R}$.

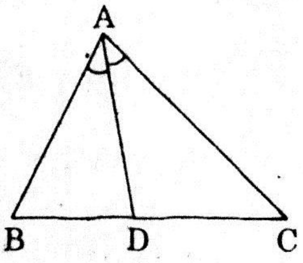
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = 2R\left(\frac{1}{ac} + \frac{1}{ab}\right) = \frac{2R(b+c)}{abc}.$$

Từ điều kiện $b + c = 2a$ ta được $\dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c} = \dfrac{4R}{bc} = \dfrac{2}{\dfrac{bc}{2R}} = \dfrac{2}{h_a}$.

2.67 $AD = l_a$ là phân giác trong của góc A của tam giác ABC.

Kí hiệu S_{ABC}, S_{ABD}, S_{ACD} là diện tích các tam giác ABC, ABD, ACD ta được :

$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD}$$



$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}cl_a\sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2}bl_a\sin\frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow \quad l = \frac{bc\sin A}{(b+c)\sin\dfrac{A}{2}} = \frac{2bc\cos\dfrac{A}{2}}{b+c}.$$

Tương tự, ta chứng minh được công thức tính l_b, l_c.

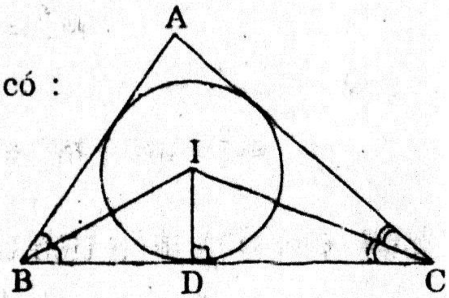
Áp dụng : $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{(2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6}+\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{3})^2}{2.2\sqrt{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})} = \dfrac{1}{2}$

$$A = 60^0.$$

$$l_a = \frac{2.2\sqrt{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cos 30^0}{2\sqrt{2}+\sqrt{6}+\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

2.68 **a)** (Xem hình bên)

$$a = BC = BD + DC$$



Trong các tam giác vuông IBD và IDC ta có :

$$\cot\widehat{IBD} = \cot\frac{B}{2} = \frac{BD}{ID}$$

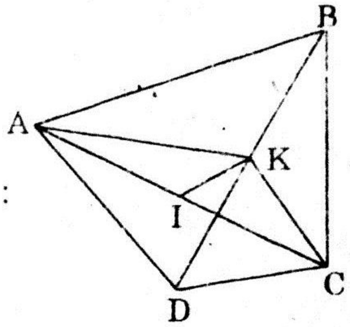
$$\Rightarrow \quad BD = ID\cot\frac{B}{2} = r\cot\frac{B}{2}.$$

Tương tự ta có : $DC = r\cot\dfrac{C}{2}$. Suy ra $a = r\left(\cot\dfrac{B}{2} + \cot\dfrac{C}{2}\right)$.

b) Từ công thức tính diện tích tam giác và định lí Sin trong tam giác ABC ta có :

$$S = \frac{abc}{4R} = \frac{2R\sin A.2R\sin B.2R\sin C}{4R} = 2R^2\sin A\sin B\sin C.$$

2.69 Trong tam giác ABD, AK là trung tuyến :



$$AB^2 + AD^2 = 2AK^2 + \frac{BD^2}{2}$$

Trong tam giác BCD, CK là trung tuyến, do đó :

$$BC^2 + CD^2 = 2CK^2 + \frac{BD^2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = 2(AK^2 + CK^2) + BD^2 \qquad (1)$$

Trong tam giác KAC thì KI là trung tuyến, do đó :

$$AK^2 + CK^2 = 2IK^2 + \frac{AC^2}{2} \qquad (2)$$

Thay kết quả (2) vào (1) ta được đpcm.

Khi ABCD là hình bình hành thì I, K trùng nhau và ta có :

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2$$

Vậy điều kiện cần và đủ để một tứ giác lồi là một hình bình hành là : "Tổng bình phương các cạnh bằng tổng bình phương của hai đường chéo".

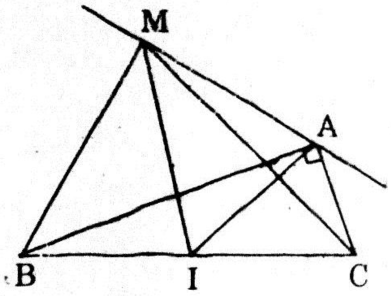
2.70 Gọi I là trung điểm của AB, ta có :

$$MI^2 = \frac{1}{2}\left(MA^2 + MB^2 - \frac{AB^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(2a^2 - \frac{a^2}{2}\right) = \frac{3a^2}{4}$$

$$MI = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Quỹ tích các điểm M là đường tròn tâm I bán kính $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

2.71 Gọi I là trung điểm của BC ta có :



$$MB^2 + MC^2 = 2MI^2 + \frac{BC^2}{2}$$

$$MB^2 + MC^2 - 2MA^2 = 2MI^2 - 2MA^2 + \frac{BC^2}{2}$$

$$= BC^2$$

$$MI^2 - MA^2 = \frac{BC^2}{4} = AI^2.$$

Chứng tỏ tam giác MAI vuông tại A.

Vậy quỹ tích các điểm M là đường thẳng qua A và vuông góc với AI.

2.72 a) $\widehat{C} = 180^0 - (\widehat{A} + \widehat{B}) = 180^0 - (30^0 + 75^0) = 75^0$.

Vậy tam giác ABC cân đỉnh A; $c = b = 4,5$;

$$a = \frac{b\sin A}{\sin 75^0} \approx \frac{4,5.\frac{1}{2}}{0,9659} \approx 2,33.$$

Kết luận : $\widehat{A} = 40^0$, $\widehat{B} = 75^0$, $\widehat{C} = 75^0$, $a = 2,33$, $b = c = 4,5$.

b) $\widehat{B} = 180^0 - (\widehat{A} + \widehat{C}) = 180^0 - (40^0 + 120^0) = 20^0$.

$$a = \frac{c\sin A}{\sin C} = \frac{35.\sin 40^0}{\sin 120^0} \approx \frac{35.0,64}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \approx 25,87$$

$$b = \frac{c\sin B}{\sin C} \approx \frac{35.0,34.2}{1,73} \approx 13,76$$

Kết luận : $\widehat{A} = 40^0$, $\widehat{B} = 20^0$, $\widehat{C} = 120^0$, $a = 25,87$, $b = 13,76$, $c = 35$.

2.73 a) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = 7^2 + 23^2 - 2.7.23\cos 130^0 \approx 784,98$

$c \approx 28,02$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{23^2 + 784,98 - 7^2}{2.23.28,02} \approx 0,98$$

$\Rightarrow \widehat{A} \approx 11^004'$, $\widehat{B} = 180^0 - (\widehat{A} + \widehat{C}) \approx 38^056'$

b) $\widehat{A} \approx 43^018'$, $\widehat{B} \approx 32^024'$, $\widehat{C} \approx 104^018'$.

Hệ thức lượng trong đường tròn

2.78 a) $IA.IB = IC.ID = \frac{3}{8}ID^2 = 12.18 \Rightarrow ID = 24$

$CD = 33$

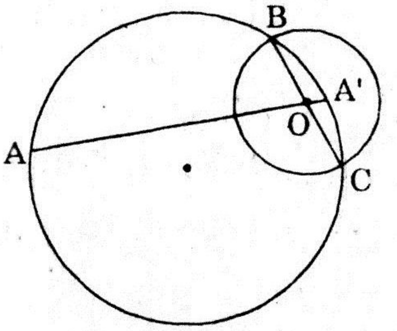
b) $ID.(32 - ID) = 12.16 \Rightarrow CI = 24$, $DI = 8$

hoặc $CI = 8$, $ID = 24$.

2.79 $$\mathscr{P}_{H/(O_1)} = \overline{HB}.\overline{HC} = -AH^2 = \frac{-b^2c^2}{b^2+c^2}.$$

$$\mathscr{P}_{H/(O_2)} = \mathscr{P}_{H/(O_3)} = 0$$

2.80 Gọi A' là giao điểm của đường thẳng AO với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Ta có :

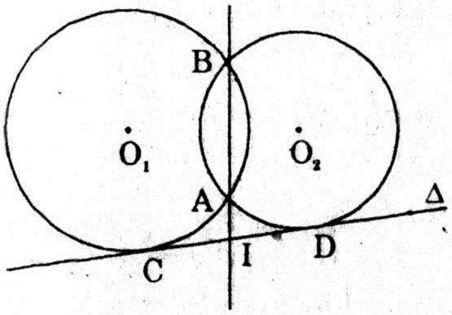


$$\mathscr{P}_{O/(ABC)} = \overline{OA}.\overline{OA'} = \overline{OB}.\overline{OC} = -R^2$$

$$\Rightarrow \quad \overline{OA'} = \frac{-R^2}{\overline{OA}}.$$

Do O, A cố định, R không đổi nên OA' không đổi, A' cố định.

2.81 Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng Δ và AB. Ta có :



$$\mathscr{P}_{I/(O_1)} = \overline{IA}.\overline{IB} = IC^2$$

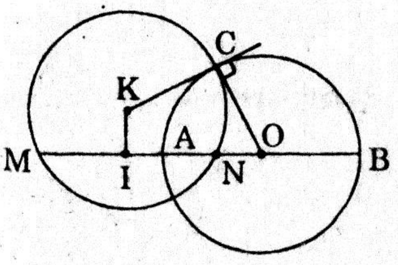
$$\mathscr{P}_{I/(O_2)} = \overline{IA}.\overline{IB} = ID^2$$

$$\Rightarrow \quad IC^2 = ID^2 \quad \Rightarrow \quad IC = ID$$

I là trung điểm của CD.

2.82 **a)** Ta có :

$$\mathscr{P}_{O/(K)} = \overline{ON}.\overline{OM} = OC^2 = OA^2 = OB^2.$$



b) Từ câu a) ta có :

$$OA^2 = \overline{OM}.\overline{ON}$$

$$\Leftrightarrow \quad (\overline{OI} + \overline{IA})^2 = (\overline{OI} + \overline{IM})(\overline{OI} + \overline{IN})$$

$$\Leftrightarrow \quad OI^2 + IA^2 + 2\overline{OI}.\overline{IA} = (\overline{OI} + \overline{IM})(\overline{OI} - \overline{IM}) \qquad (\text{do } \overline{IN} = -\overline{IM})$$

$$\Leftrightarrow \quad IM^2 = 2\overline{IO}.\overline{IA} - IA^2 = \overline{IA}(\overline{IA} + \overline{IB}) - IA^2 = \overline{IA}.\overline{IB}$$

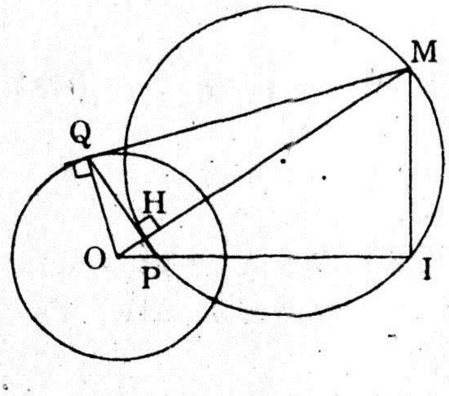
$$\Rightarrow \quad IM^2 = IN^2 = \overline{IA}.\overline{IB} \qquad (\text{đpcm}).$$

2.83 Đường tròn ngoại tiếp tam giác PHM, kí hiệu (PHM), có đường kính PM (vì $\widehat{PHM} = 90^0$). Ta có :

$$\mathscr{P}_{O/(PHM)} = \overline{OH}.\overline{OM} = R^2$$

Trong tam giác vuông OQM ta có : $OQ^2 = \overline{OH}.\overline{OM} = R^2$

Suy ra : $\overline{OP}.\overline{OI} = R^2$, $\overline{OI} = \dfrac{R^2}{\overline{OP}}$.



Vì O, P cố định, R không đổi nên $\overline{OI}$ không đổi, tức là I cố định. Vậy đường tròn (PHM) luôn đi qua điểm I cố định xác định bởi hệ thức $OI = \dfrac{R^2}{OP}$.

Đường tròn (PHM) đường kính PM nên $\widehat{PIM} = 90^0$, suy ra $MI \perp OP$. Điểm M di động trên đường thẳng vuông góc với đường thẳng OP tại điểm I xác định bởi $OI = \dfrac{R^2}{OP}$.

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG II

2.84 **a)** $A = -\dfrac{1}{2}$. **b)** $B = \dfrac{19}{12}$.

2.85 **a)** $\cos x = \dfrac{5}{13}$, $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \dfrac{12}{13}$, $\tan x = \dfrac{12}{5}$, $\cot x = \dfrac{5}{12}$.

b) $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \Rightarrow \cos x = -\sqrt{\dfrac{1}{1 + \tan^2 x}} = -\dfrac{3}{5}$

$\sin x = \tan x.\cos x = \left(-\dfrac{4}{3}\right).\left(-\dfrac{3}{5}\right) = \dfrac{4}{5}$, $\cot x = -\dfrac{3}{4}$.

2.86 **a)** $$VT = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x(1 - \cos^2 x)}{\cos^2 x - \sin^2 x(1 - \sin^2 x)} = \frac{\sin^2 x(1 - \cos^2 x)}{\cos^2 x(1 - \sin^2 x)}$$

$$= \frac{\sin^2 x.\sin^2 x}{\cos^2 x.\cos^2 x} = \tan^4 x.$$

b) $$VT = \frac{(1 + 2\sin x\cos x)(1 - 2\sin x\cos x)}{\cos^2 x + \sin^2 x + 2\sin x\cos x}$$

$$= \frac{(1 + 2\sin x\cos x)(1 - 2\sin x\cos x)}{1 + 2\sin x\cos x} = 1 - 2\sin x\cos x.$$

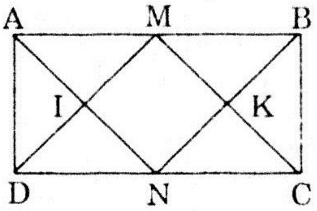
2.87 **a)** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) = \dfrac{1}{2}(7^2 + 10^2 - 8^2) = \dfrac{85}{2}$

b) $\overrightarrow{CA}^2 = (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA})^2 = CB^2 + BA^2 + 2\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{BA}$

$\Rightarrow \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CB} = \dfrac{1}{2}[CA^2 - CB^2 - BA^2] = -\dfrac{13}{2}$

2.88 **a)** $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{NM}$

$$= -AN.MN\cos45^0 = -\sqrt{2}.1.\frac{\sqrt{2}}{2} = -1$$



b) $\overrightarrow{DK}.\overrightarrow{MC} = (\overrightarrow{DI} + \overrightarrow{IK})\overrightarrow{MC} = 2(\overrightarrow{DI} + \overrightarrow{IK})\overrightarrow{KC}$

$$= 2\,\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{KC} + 2\,\overrightarrow{IK}.\overrightarrow{KC} \qquad (1)$$

$\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{DI}.\overrightarrow{IN} = 0$ (vì $DI \perp IN$)

$\overrightarrow{IK}.\overrightarrow{KC} = 1.\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 135^0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{2}$. Vậy $\overrightarrow{DK}.\overrightarrow{MC} = -1$.

c) $\overrightarrow{DM}.\overrightarrow{IK} = 2\,\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IK} = 2.\frac{\sqrt{2}}{2}.1\cos 45^0 = 1.$

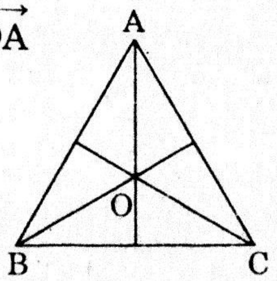
2.89 Tam giác ABC đều nên tâm O là trọng tâm của tam giác. Ta có :

$$T = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}).\overrightarrow{OB} + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}).\overrightarrow{OC} + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}).\overrightarrow{OA}$$

$$= \overrightarrow{MO}.(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}) + \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA}$$

$= 3\,\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ (vì $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$,

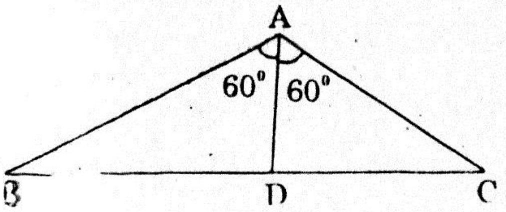
$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA}$)



T không phụ thuộc M và $T = 3OA^2\cos120^0 = -\frac{2a^2}{3}$.

2.90 Theo tính chất của phân giác

$$\frac{\overrightarrow{DB}}{\overrightarrow{DC}} = -\frac{AB}{AC} = -\frac{c}{b}$$



$\Rightarrow$ $c.\overrightarrow{DC} + b.\overrightarrow{DB} = \vec{0}$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{c}{b}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} + \frac{c}{b}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD})$$

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{AD} = \frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}$

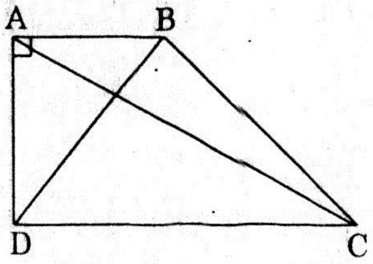
$$\overrightarrow{AD}^2 = AD^2 = \frac{b^2}{(b+c)^2}AB^2 + \frac{c^2}{(b+c)^2}AC^2 + \frac{2bc}{(b+c)^2}.\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$$

Thay $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC\cos 120^0 = -\dfrac{1}{2}AB.AC$ ta được :

$$AD^2 = 2\frac{b^2c^2}{(b+c)^2} - \frac{b^2c^2}{(b+c)^2}$$

$$\Rightarrow \quad AD = \frac{bc}{b+c} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{AD} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AB}.$$

2.91 $AC \perp BD \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = 0$



$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC})(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) = 0$$

$$= \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AD} = 0$$

$$= AD^2 - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC} = 0$$

(vì $AD \perp BA \Rightarrow \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BA} = 0, \quad AD \perp BC \Rightarrow \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AD} = 0$)

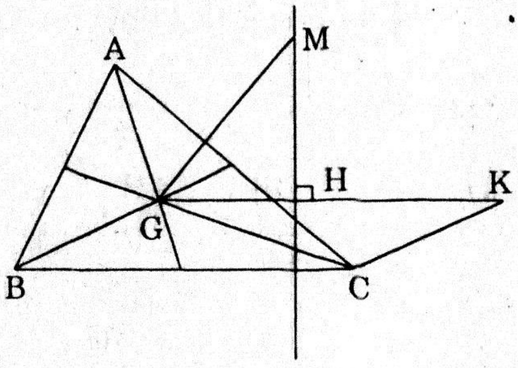
Do đó $\quad AC \perp BD \quad \Leftrightarrow \quad AD^2 - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC} = h^2 - ab = 0.$

2.92 $\quad \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = MC^2 - MB^2 + BC^2$

$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = (\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB}) + BC^2$

$\Leftrightarrow \quad (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = BC^2 \qquad (1)$

Ta có : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$



nên (1) có dạng :

$$\overrightarrow{CB}.3\overrightarrow{MG} = BC^2$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{GM} = \frac{BC^2}{3}$$

Dựng vectơ $\overrightarrow{GK} = \overrightarrow{BC}$. Gọi H là hình chiếu của M trên đường thẳng GK : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{GK}.\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{GK}.\overrightarrow{GH} = \dfrac{BC^2}{3} \qquad (2)$

Hệ thức (2) chứng tỏ M chạy trên đường thẳng vuông góc với GK tại điểm H thỏa mãn $\overline{GH} = \dfrac{BC^2}{3GK}$.

2.93 **a)** $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = 2R \quad \Rightarrow \quad \sin A = \dfrac{a}{2R}, \quad \sin B = \dfrac{b}{2R}.$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \qquad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}.$$

$$\frac{\tan A}{\tan B} = \frac{\sin A \cos B}{\cos A \sin B} = \frac{\dfrac{a}{2R} \cdot \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}}{\dfrac{b}{2R} \cdot \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{b^2 + c^2 - a^2}$$

b) Theo công thức Hêrông :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad (1)$$

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{4+3+2}{2} = \frac{9}{2},$$

$$p - a = \frac{1}{2}, \quad p - b = \frac{3}{2}, \quad p - c = \frac{5}{2}$$

Thay vào (1) ta tính được : $S = \sqrt{\dfrac{9}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{5}{2}} = \dfrac{3\sqrt{15}}{4}$

Các đường cao :

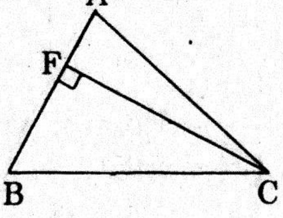
$$h_a = \frac{2S}{a} = \frac{3\sqrt{15}}{8}, \qquad h_b = \frac{2S}{b} = \frac{3\sqrt{15}}{6}, \qquad h_c = \frac{2S}{c} = \frac{3\sqrt{15}}{4}$$

Bán kính đường tròn nội tiếp : $r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{3\sqrt{15}}{4} \times \dfrac{2}{9} = \dfrac{\sqrt{15}}{6}$

Bán kính đường tròn ngoại tiếp : $R = \dfrac{abc}{4S} = \dfrac{4.3.2}{3\sqrt{15}} = \dfrac{8}{\sqrt{15}}.$

2.94 **a)** $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C} = \sqrt{7^2 + 9^2 + 7.9} = \sqrt{193}$

$$\sin A = \frac{a \sin C}{c} = \frac{7.\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{193}} \approx 0,4364 \quad \Rightarrow \quad \hat{A} = 25^0 52'.$$



$$\hat{B} = 180^0 - (\hat{A} + \hat{C}) \approx 34^0 08'.$$

b) • $a = 2R\sin A = R\sqrt{3} = 5\sqrt{3} \approx 8,66$

• $\dfrac{CF}{AC} = \dfrac{h_c}{b} = \sin A \quad \Rightarrow \quad b = \dfrac{h_c}{\sin A} = \dfrac{\sqrt{3}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = 2$

- $\frac{CF}{BC} = \frac{h_c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{5\sqrt{3}} = \frac{1}{5} = \sin B \quad \Rightarrow \quad \hat{B} = 11^0 32'$

  $\hat{C} = 180^0 - (\hat{A} + \hat{B}) \approx 108^0 28'$.

- $c = 2R\sin\hat{C} = 10.\sin 108^0 28' \approx 9{,}49$.

Chương III

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

§1. Phương trình của đường thẳng

3.7. **a)** $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-3} \quad \Leftrightarrow \quad 3x + 2y - 3 = 0$

b) Vectơ chỉ phương $\vec{u}(2; 3)$

$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 3x - 2y - 4 = 0$

c) Vectơ chỉ phương của Δ : $\vec{u}(-1; 2)$. Vectơ pháp tuyến của Δ đồng thời là vectơ chỉ phương của đường thẳng cần tìm là $\vec{n}(2; 1)$.

$\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} \quad \Leftrightarrow \quad x - 2y + 3 = 0$.

3.8. **a)** $\frac{x-3}{-\frac{1}{2}} = \frac{y+3}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 6x + y - 15 = 0$

b) $2(x-1) - 3(y-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 3y + 4 = 0$

c) $x - x_0 = 0$

d) $y - y_1 = 0$.

3.9. **a)** Vectơ chỉ phương của Δ_1 : $\vec{u}(5; 3)$, $\quad M\left(0; \frac{7}{5}\right) \in \Delta_1$.

Phương trình tham số của Δ_1 : $\begin{cases} x = 5t \\ y = \frac{7}{5} + 3t, \ t \in R \end{cases}$

Phương trình chính tắc của Δ_1 : $\frac{x}{5} = \frac{y - \frac{7}{5}}{3}$

b) $N(2; 0) \in \Delta_2$. Vectơ chỉ phương của Δ_2 : $\vec{u}(2; 3)$.

Phương trình tham số của Δ_2 : $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3t, \ t \in R \end{cases}$

Phương trình chính tắc của Δ_2 : $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y}{3}$

c) $\Delta_3 : \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 2 - 2t, \ t \in R \end{cases}$ hoặc $\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-2}{-2}$

d) + Nếu $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$: $\Delta_4 : \begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t, \ t \in R \end{cases}$

hoặc $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$

+ Nếu $x_1 = x_2$, $y_1 \neq y_2$, Δ_4 không có phương trình chính tắc và phương trình tham số là : $\begin{cases} x = x_1 + 0t \\ y = t, \ t \in R \end{cases}$

+ Nếu $x_1 \neq x_2$, $y_1 = y_2$, Δ_4 không có phương trình chính tắc và có phương trình tham số là : $\begin{cases} x = t \\ y = y_1 + 0t, \ t \in R \end{cases}$

Không xét trường hợp $x_1 = x_2$ và $y_1 = y_2$. Bởi vì khi đó có vô số đường thẳng đi qua $A(x_1; y_1)$.

3.10. a) Trung điểm F của AB có tọa độ $F\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$.

$F\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{7}{2}\right)$. Trung tuyến kẻ từ C nằm trên đường thẳng chứa C, F có phương trình :

$$\frac{x - x_C}{x_C - x_F} = \frac{y - y_C}{y_C - y_F} \rightarrow \frac{x-3}{3 - \frac{1}{2}} = \frac{y-6}{6 - \frac{7}{2}} \Leftrightarrow x - y + 3 = 0$$

b) Đường cao kẻ từ A vuông góc với đường thẳng BC. Gọi H(x; y) ta có :

$$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow (x - x_A)(x_C - x_B) + (y - y_A)(y_C - y_B) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(x - 2) + 2(y - 3) = 0$$

Đường thẳng chứa AH là $2x + y - 7 = 0$.

Tọa độ H là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2x + y - 7 = 0 \\ x - 2y + 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad H(1; 5).$$

3.11. Gọi tam giác là ABC. Cạnh AB thuộc đường thẳng $3x - 2y + 1 = 0$. Cạnh AC thuộc đường thẳng $x - y + 1 = 0$ thì tọa độ đỉnh A là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ x - y = -1 \end{cases} \Rightarrow \quad A(1; 2).$$

Giao điểm F của đường trung tuyến ứng với cạnh thứ nhất là trung điểm của AB.

$$\begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad F(3; 5).$$

Suy ra tọa độ của đỉnh $B(x_B; y_B)$ là :

$$\begin{matrix} x_B = 2x_F - x_A = 2.3 - 1 = 5 \\ y_B = 2y_F - y_A = 2.5 - 2 = 8 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad B(5; 8)$$

Tọa độ của đỉnh thứ ba $C(x_C; y_C)$ là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad C(2; 3).$$

Phương trình của cạnh thứ ba BC là :

$$\frac{x - x_B}{x_C - x_B} = \frac{y - y_B}{y_C - y_B} \Leftrightarrow \frac{x - 5}{2 - 5} = \frac{y - 8}{3 - 8} \Leftrightarrow 5x - 3y - 1 = 0.$$

3.12. Gọi cạnh đã cho là AB nằm trên đường thẳng $x - 2y + 7 = 0$. Hai đường trung tuyến ứng với cạnh AC và BC theo thứ tự là $x + y - 5 = 0$ và $2x + y - 11 = 0$.

Tọa độ đỉnh A là nghiệm của hệ : $\begin{cases} x - 2y + 7 = 0 \\ 2x + y - 11 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad A(3; 5).$

Tọa độ đỉnh B là nghiệm của hệ : $\begin{cases} x - 2y + 7 = 0 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad B(1; 4).$

Tọa độ trọng tâm G là nghiệm của hệ $\begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ 2x + y - 11 = 0 \end{cases} \Rightarrow G(6; -1).$

Trung điểm F của AB có tọa độ là $F\left(2; \frac{9}{2}\right)$.

Tọa độ của đỉnh C là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} x - x_F = 3(x_G - x_F) \\ y - y_F = 3(y_G - y_F) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 3(6 - 2) \\ y = \dfrac{9}{2} + 3\left(-1 - \dfrac{9}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \quad C(14; -12)$$

Suy ra các phương trình của các cạnh AC và BC là :

$$17x + 11y - 106 = 0 \quad \text{và} \quad 16x + 13y - 68 = 0.$$

3.13. Giả sử đường thẳng qua A cắt Ox tại $B(b; 0)$ và cắt Oy tại $C(0; c)$ thì đường thẳng có phương trình theo đoạn chắn của đường thẳng là : $\frac{x}{b} + \frac{y}{c} = 1$. Theo điều kiện của đề :

$$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CA} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B - x_A = 2(x_A - x_C) \\ y_B - y_A = 2(y_A - y_C) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b - 1 = 2(1 - 0) \\ 0 - 2 = 2(2 - c) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ c = 3 \end{cases}$$

Đường thẳng cần vẽ là : $\frac{x}{3} + \frac{y}{3} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x + y - 3 = 0.$

3.14. a) $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Hai đường thẳng cắt nhau.

b) $\begin{cases} x = 3 + 6t \\ y = \dfrac{1}{2} + 2t \end{cases} \Leftrightarrow \quad 2x - 6y - 3 = 0$

$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -6 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$. Hai đường thẳng song song.

c) $\begin{cases} x = 5 + 4t \\ y = -2 + 2t \end{cases} \Leftrightarrow \quad x - 2y - 9 = 0$

$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 7 + 3t \end{cases} \Leftrightarrow \quad 3x + 2y - 17 = 0.$

$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$. Hai đường thẳng cắt nhau.

3.15. Ta có : $\begin{cases} x_A + x_B + x_C = 3x_G \\ y_A + y_B + y_C = 3y_G \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 + 2 + x_C = 3 \\ 2 + 4 + y_C = 3 \end{cases} \Rightarrow \quad C(2; -3).$

Phương trình đường thẳng chứa AB :

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_A - y_B} \Leftrightarrow \frac{x + 1}{2 + 1} = \frac{y - 2}{4 - 2} \Leftrightarrow 2x - 3y + 8 = 0.$$

Phương trình đường thẳng chứa cạnh AC : $5x + 3y - 1 = 0$, chứa cạnh BC : $x - 2 = 0$.

3.16. Vectơ $\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB}$ theo thứ tự là vectơ pháp tuyến của các đường thẳng BC và AC. Ta có : $\overrightarrow{HA} = \vec{a}(-1; -2)$, $\overrightarrow{HB} = \vec{b}(2; 2)$

Phương trình đường thẳng BC :

$$-1(x - 4) - 2(y - 5) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 14 = 0$$

Phương trình đường thẳng AC :

$$2(x - 1) + 2(y - 1) = 0 \Leftrightarrow x + y - 2 = 0$$

Phương trình đường thẳng AB : $4x - 3y - 1 = 0$.

3.17. **a)** Tìm tọa độ của trực tâm H.

Ta có : $\overrightarrow{BC}$ là vectơ pháp tuyến của đường thẳng AH, $\overrightarrow{AC}$ là vectơ pháp tuyến của đường thẳng BH. $\overrightarrow{BC}(-5; 1)$, $\overrightarrow{AC}(-4; 6)$.

Phương trình đường cao AH :

$$-5(x - 1) + 1(y + 2) = 0 \Leftrightarrow -5x + y + 7 = 0$$

Phương trình đường cao BH :

$$-4(x - 2) + 6(y - 3) = 0 \Leftrightarrow -4x + 6y - 10 = 0$$

Tọa độ của trực tâm H là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} -5x + y + 7 = 0 \\ -4x + 6y - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow H(2; 3).$$

Ghi chú : Có thể nhận xét rằng $AB^2 + CB^2 = AC^2$ nên tam giác ABC vuông tại B. Vậy B chính là trực tâm của tam giác.

b) Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp I.

Cách 1 : Tìm tọa độ giao điểm của hai đường trung trực.

Cách 2 : Xác định tọa độ điểm I thỏa mãn điều kiện :

$$IA = IB = IC \Leftrightarrow IA^2 = IB^2 = IC^2$$

Ở đây ta tìm theo cách thứ nhất :

Phương trình đường trung trực của AB, AC theo thứ tự là :

$$x + 5y - 4 = 0 \quad \text{và} \quad -x + 6y - 10 = 0$$

$$\begin{cases} x + 5y - 4 = 0 \\ -4x + 6y - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad I(-1; 1).$$

3.18. **a)** Bằng cách giải hệ gồm hai trong ba phương trình đã cho ta tìm được tọa độ một đỉnh của tam giác. Kết quả là các đỉnh của tam giác có tọa độ là A(–1; –1), B(2; 4), C(6; 1).

Tọa độ trọng tâm $G(x_G; y_G)$:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{-1 + 2 + 6}{3} = \frac{7}{3}$$

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{-1 + 4 + 1}{3} = \frac{4}{3}$$

b) G_1 đối xứng với G đối với cạnh AB có nghĩa AB là đường trung trực của đoạn GG_1.

Phương trình đường thẳng GG_1 :

$$\overrightarrow{GG_1} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow \quad (x - x_G)(x_B - x_A) + (y - y_G)(y_B - y_A) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 3\left(x - \frac{7}{3}\right) + 5\left(y - \frac{4}{3}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x + 5y - \frac{41}{3} = 0$$

Giao điểm I của các đường thẳng AB và GG_1 có tọa độ là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} 5x - 3y + 2 = 0 \\ 3x + 5y - \dfrac{41}{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad I\left(\frac{31}{34}; \frac{223}{102}\right).$$

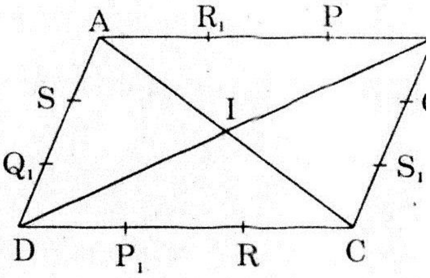
$$x_{G_1} = 2x_I - x_G = \frac{31}{17} - \frac{7}{3} = -\frac{26}{51}$$

$$y_{G_1} = 2y_I - y_G = \frac{223}{51} - \frac{4}{3} = \frac{155}{51}$$

$$G_1\left(-\frac{26}{51}; \frac{155}{51}\right).$$

3.19. Gọi P_1, Q_1, R_1, S_1 theo thứ tự là điểm đối xứng của P, Q, R, S đối với I thì phương trình của AB, BC, CD, DA theo thứ tự là phương trình của PR_1, QS_1, RP_1 và SQ_1. Do I là trung điểm của PP_1, QQ_1,

RR_1, SS_1. Suy ra tọa độ của P_1, Q_1, R_1, S_1 theo thứ tự là : $P_1(-1; 12$
$Q_1(-4; 6)$, $R_1(-3; 3)$, $S_1(7; 8)$.



Phương trình của cạnh AC là phương trình của PR_1 :

$$\frac{x - x_P}{x_{R_1} - x_P} = \frac{y - y_P}{y_{R_1} - y_P}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x-3}{-3-3} = \frac{y}{3-0}$$

$$\Leftrightarrow \quad x + 2y - 3 = 0$$

Phương trình của cạnh BC : $2x - y - 6 = 0$,

của cạnh CD : $x + 2y - 23 = 0$

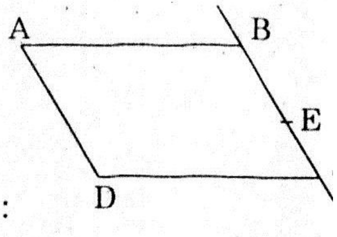
và của cạnh DA : $2x - y + 14 = 0$.

3.20. Tọa độ đỉnh A là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} 3x + 4y - 12 = 0 \\ 5x - 12y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad A\left(3; \frac{3}{4}\right).$$

Cạnh BC của hình bình hành nằm trên đường thẳng qua $E\left(-2; \frac{13}{6}\right.$

và song song với AD nên có phương trình :



$$\frac{x+2}{12} = \frac{y - \frac{13}{6}}{5} \quad \Leftrightarrow \quad 5x - 12y + 36 = 0$$

Tọa độ đỉnh B là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{matrix} AB \\ BC \end{matrix}\begin{cases} 3x + 4y - 12 = 0 \\ 5x - 12y + 36 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad B(0; 3).$$

Tọa độ đỉnh $C(x_C; y_C)$ xác định bởi :

$$\begin{aligned} x_C &= 2x_E - x_B = -4 - 0 = -4 \\ y_C &= 2y_E - y_B = \frac{13}{3} - 3 = \frac{4}{3} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad C\left(-4; \frac{4}{3}\right).$$

Phương trình của cạnh CD :

$$\frac{x - x_C}{-4} = \frac{y - y_C}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x+4}{-4} = \frac{y - \frac{4}{3}}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 9x + 12y + 20 =$$

3.26. **a)** $d = \dfrac{|3(-2) - 5.1 + 6|}{\sqrt{3^2 + (-5)^2}} = \dfrac{5}{\sqrt{34}}$

b) d' : Ax + By + C = 0 với A, B, C thỏa mãn hệ phương trình :

$$\begin{cases} A(-2) + B.1 + C = 0 \\ \dfrac{|A.1 + B.2 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 2 \end{cases} \Rightarrow \quad d' : \left[\begin{array}{l} (-3 - 2\sqrt{6})x + 5y - 11 + 4\sqrt{6} = 0 \\ (-3 - 2\sqrt{6})x + 5y - 11 - 4\sqrt{6} = 0 \end{array}\right.$$

3.27. Điều kiện để M và N cùng phía đối với (d) : 2x + 3y − 5 = 0 là :

$$(2.3 + 3.m - 5)(2.6 + 3.2 - 5) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad m > -\frac{1}{3}.$$

3.28. Khoảng cách từ điểm M(x; y) đến đường thẳng Δ : 3x − 4y + 6 = 0 là :

$$d(M; \Delta) = \frac{|3x - 4y + 6|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad (3x - 4y + 6)^2 = 15^2$$

$$\Leftrightarrow \quad (3x - 4y + 6 + 15)(3x - 4y + 6 - 15) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x - 4y + 21 = 0 \quad \text{hoặc} \quad 3x - 4y - 9 = 0$$

Tập hợp các điểm M cách đường thẳng Δ : 3x − 4y + 6 = 0 bằng 3 là hai đường thẳng song song với Δ có phương trình lần lượt là :

$$\Delta_1 = 3x - 4y + 21 = 0; \qquad \Delta_2 = 3x - 4y - 9 = 0.$$

3.29. $d(M; \Delta_1) = \dfrac{|2x - 3y + 6|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}}$; $\qquad d(M; \Delta_2) = \dfrac{|2x - 3y - 7|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}}$

Điều kiện M cách đều Δ_1 và Δ_2 tương đương với đẳng thức :

$$\frac{|2x - 3y + 6|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{|2x - 3y - 7|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad |2x - 3y + 6| = |2x - 3y - 7|$$

$$\Leftrightarrow \quad (2x - 3y + 6 + 2x - 3y - 7)[(2x - 3y + 6) - (2x - 3y - 7)] = 0$$

Vậy tập hợp các điểm M cách đ[illegible] và Δ_2 là đường thẳng

$$\Delta : 2x - 3y - \frac{1}{2} = 0.$$

3.30. Xét đoạn AB ta thấy :

$$[(2(-1) - 5(2) + 4][2(2) - 5(3) + 4] = 56 > 0$$

v A(−1; 2) và B(2; 3) nằm cùng phía đối với đường thẳng (d) : − 5y + 4 = 0, nghĩa là (d) không cắt đoạn thẳng AB.

Tương tự xét AC ta có :

$$[2(-1) - 2(2) + 4][2(-3) - 5(-4) + 4] = -144 < 0$$

A và C nằm khác phía đối với (d), do đó (d) cắt đoạn thẳng AC.

Làm tương tự ta thấy (d) cắt BC.

3.31. Từ tính chất hình học của đường trung bình của tam giác, ta thấy mỗi đường thẳng qua hai trung điểm của hai cạnh là đường thẳng cách đều các đỉnh của tam giác.

Trung điểm BC là $A_1\left(3; \frac{7}{2}\right)$, trung điểm của AC, BC theo thứ tự là $B_1\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$, $C_1\left(\frac{1}{2}; 3\right)$. Các đường thẳng cách đều A, B, C theo thứ tự là các đường thẳng chứa :

$$A_1B_1 : \frac{x-3}{\frac{3}{2}-3} = \frac{y-\frac{7}{2}}{\frac{3}{2}-\frac{7}{2}} \Leftrightarrow 8x - 6y - 3 = 0$$

$$B_1C_1 : \frac{x-\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}} = \frac{y-\frac{3}{2}}{3-\frac{3}{2}} \Leftrightarrow 6x + 4y - 15 = 0$$

$$C_1A_1 : \frac{x-\frac{1}{2}}{3-\frac{1}{2}} = \frac{y-3}{\frac{7}{2}-3} \Leftrightarrow 2x - 10y + 29 = 0$$

3.32. **a)** $\dfrac{x+y+6}{\sqrt{2}} = \pm\dfrac{x-4y-10}{\sqrt{17}}$

b) $\cos(d_1; d_2) = \dfrac{|1.1 - 1.4|}{\sqrt{1^2+1^2}\sqrt{1^2+(-4)^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{34}}$

$\Rightarrow (d_1; d_2) \approx 59^0 02'$.

3.33. $\Delta' : Ax + By + C = 0$ qua $A(3; 5)$ lập với Δ góc 45^0.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3.A + 5.B + C = 0 \\ \cos(\Delta; \Delta') = \dfrac{|2A + 5B|}{\sqrt{2^2 + 5^2}\sqrt{A^2 + B^2}} = \cos 45^0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Suy ra : $A = -9$, $B = 21$, $C = -78$ hoặc $A = 49$, $B = 21$, $C = -252$.

Vậy $\Delta' : 3x - 7y + 26 = 0$ hoặc $7x + 3y - 36 = 0$.

3.34. Đường thẳng AB : $\dfrac{x - 2}{1 - 2} = \dfrac{y - 3}{1 - 3} \Leftrightarrow 2x - y - 1 = 0$

Đường thẳng AC : $\dfrac{x - 2}{6 - 2} = \dfrac{y - 3}{5 - 3} \Leftrightarrow x - 2y + 4 = 0$

Các đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng AB và AC là : $\dfrac{2x - y - 1}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \pm \dfrac{x - 2y + 4}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}}$ (1)

Thay tọa độ của $M(0; 3)$ vào vế trái phương trình của AB và AC ta thấy :

$$(2.0 - 3 - 1)(0 - 2.3 + 4) > 0$$

Vậy đường phân giác của góc có chứa $M(0; 3)$ có phương trình (1) với dấu +.

3.35. Đường thẳng AB : $x - 2y - 2 = 0$. Đường thẳng AC : $3x + y - 6 = 0$.

$$\vec{n}_{AB} . \vec{n}_{AC} = 1.3 - 2.1 = 1 > 0 \quad \text{góc A nhọn}$$

Phân giác trong của góc A : $\dfrac{x - 2y - 2}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \dfrac{3x + y - 6}{\sqrt{3^2 + 1^2}}$.

3.36 $\vec{n}_{BC} . \vec{n}_{AC} = (1.1 - 1.3) = -2 < 0$

Phương trình đường phân giác của góc C là :

$$\frac{x - 3y - 5}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = -\frac{x + y + 1}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \Leftrightarrow (1 + \sqrt{5})x + (\sqrt{5} - 3)y - 5 + \sqrt{5} = 0$$

Tam giác ABC cân đỉnh C nên đường phân giác của góc C vuông góc với đáy AB. Vậy phương trình đáy AB là :

$$(3 - \sqrt{5})(x - 1) + (\sqrt{5} + 1)(y - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3 - \sqrt{5})x + (\sqrt{5} + 1)y - 4 = 0.$$

3.37 **a)** Đường phân giác trong của góc A :

$$\frac{4x + 3y - 1}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = -\frac{3x + 4y - 6}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \quad \Leftrightarrow \quad x + y - 1 = 0$$

Đường phân giác trong của góc C :

$$\frac{3x + 4y - 6}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = -\frac{y}{\sqrt{1^2 + 0^2}} \quad \Leftrightarrow \quad 3x + 9y - 6 = 0$$

Tọa độ tâm I của đường tròn nội tiếp là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 3x + 9y - 6 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

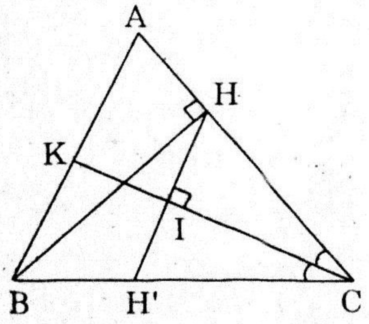
3.38 Đường thẳng chứa cạnh AC đi qua A vuông góc với đường cao BH : $x - y = 0$ nên vectơ chỉ phương của AC là $\vec{u}(1; -1)$.

Phương trình đường thẳng chứa cạnh AC

$$\frac{x + 1}{1} = \frac{y - 3}{-1} \quad \Leftrightarrow \quad x + y - 2 = 0$$

Chân đường cao H là giao điểm của AC và BH.

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad H(1; 1).$$



Điểm H' đối xứng với H qua phân giác của góc C nằm trên cạnh BC

Ta có phương trình HH' vuông góc với phân giác CK là :

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 3x - y - 2 = 0$$

Giao điểm của HH' với CK là I có tọa độ :

$$\begin{cases} x + 3y + 2 = 0 \\ 3x - y - 2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad I\left(\frac{2}{5}; -\frac{4}{5}\right)$$

Tọa độ H' :

$$\left.\begin{aligned} x_{H'} &= 2x_I - x_H = \frac{4}{5} - 1 = -\frac{1}{5} \\ y_{H'} &= 2y_I - y_H = -\frac{8}{5} - 1 = -\frac{13}{5} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad H'\left(-\frac{1}{5}; -\frac{13}{5}\right).$$

Tọa độ đỉnh C : $\begin{cases} x + 3y + 2 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad C(4; -2).$

Phương trình của cạnh BC là phương trình đường thẳng CH' :

$$\frac{x-4}{-\frac{1}{5}-4}=\frac{y+2}{-\frac{13}{5}+2} \Leftrightarrow x-7y-18=0$$

3.39 **a)** $\overrightarrow{BC}=(8;8)$. Đường thẳng BC : $x-y-7=0$.

Độ dài đường cao $OH=d(O;BC)=\frac{|0-0-7|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{7\sqrt{2}}{2}$.

b) Phương trình OB : $3x+4y=0$

OC : $5x-12y=0$

Phân giác của góc BOC :

$$\frac{3x+4y}{\sqrt{3^2+4^2}}-\frac{5x-12y}{\sqrt{5^2+12^2}}=0 \quad \text{hoặc} \quad \frac{3x+4y}{\sqrt{3^2+4^2}}+\frac{5x-12y}{\sqrt{5^2+12^2}}=0.$$

Thay tọa độ của B và C vào hai phương trình ta thấy B và C khác phía với đường thẳng có phương trình :

$$\frac{3x+4y}{\sqrt{3^2+4^2}}-\frac{5x-12y}{\sqrt{5^2+12^2}}=0 \Leftrightarrow 7x+56y=0$$

là đường phân giác trong của góc O.

3.40 **a)** $\Delta : x-y-3=0$

b) Điểm C là giao điểm của đường trung trực của AB và đường thẳng Δ : $\begin{cases}x-y-3=0\\x-2y+7=0\end{cases} \Rightarrow C(13;10)$.

Đường thẳng BC cần tìm : $\frac{x+1}{13+1}=\frac{y-8}{10-8} \Leftrightarrow x-7y+57=0$.

3.41 **a)** OA : $x-2y=0$, BD có phương trình $2x+y-5=0$.

$$\begin{cases}x-2y=0\\2x+y-5=0\end{cases} \Rightarrow D(2;1).$$

b) AB : $x+3y-15=0$, OB : $x=0$.

Đường thẳng đi qua D vuông góc với AB : $3x-y-5=0$.

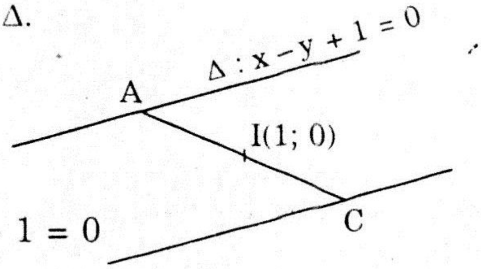
Tọa độ điểm E : $\begin{cases}3x-y-5=0\\x+3y-15=0\end{cases} \Rightarrow E(3;4)$

Làm tương tự ta được F(0; 1).

3.42 Tọa độ A(2; 3), C đối xứng với A qua I có tọa độ :

$$\begin{cases} x_C = 2x_I - x_A = 2 - 2 = 0 \\ y_C = 2y_I - y_A = 0 - 3 = -3 \end{cases} \Rightarrow C(0; -3).$$

Đường thẳng CD đi qua C song song với Δ.



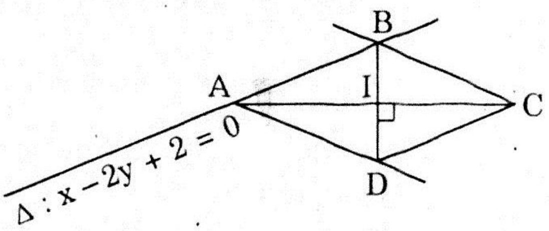
$CD : 1(x - 0) - 1(y + 3) = 0$

$\Leftrightarrow \quad x - y - 3 = 0$

Cạnh AD : $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{-1} \quad \Leftrightarrow \quad x + y - 1 = 0$

Cạnh BC : $\dfrac{x-0}{1} = \dfrac{y+3}{-1} \quad \Leftrightarrow \quad x + y + 3 = 0.$

3.43 Theo tính chất của hình thoi :



$\overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{AI}, \quad BD \perp AC.$

Ta tìm được : C(4; 1)

BD : $x - 2 = 0$

Tọa độ B : $\begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(2; 2)$

Phương trình cạnh BC : $\dfrac{x-2}{4-2} = \dfrac{y-2}{1-2} \quad \Leftrightarrow \quad x + 2y - 6 = 0.$

Phương trình cạnh CD : $\dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y-1}{1} \quad \Leftrightarrow \quad x - 2y - 2 = 0.$

Phương trình cạnh AD : $\dfrac{x}{-2} = \dfrac{y-1}{1} \quad \Leftrightarrow \quad x + 2y - 2 = 0.$

3.44 **a)** $m = 3$.

b) $\dfrac{m-3}{1} = \dfrac{-(m-2)}{3} \quad \Rightarrow \quad m = \dfrac{11}{4}$

c) Δ vuông góc với đường thẳng $2x - y + 1 = 0$.

Khi $2(m-3) + (m-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = \dfrac{8}{3}.$

3.45 Giao điểm A của Δ_1 và Δ_2 có tọa độ nghiệm đúng hệ

$$\begin{cases} 3x - 4y + 15 = 0 \\ 5x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-1; 3).$$

Δ_1, Δ_2, Δ_m đồng quy khi tọa độ A nghiệm đúng phương trình của Δ_m :

$$m(-1) - 3(2m - 1) + 9m - 13 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = 5.$$

3.46 Biện luận theo m hệ phương trình bậc nhất hai ẩn :

$$\begin{cases} 2(m - 1)x + y = 2 \\ (m + 2)x + (m - 1)y = 3 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2(m - 1) & 1 \\ m + 2 & m - 1 \end{vmatrix} = m(2m - 5) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = 0 \vee m = \frac{5}{2}$$

- Nếu $D \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \neq 0$ và $m \neq \frac{5}{2}$ thì Δ_m và Δ'_m cắt nhau.

- Nếu m = 0 ta có hai đường thẳng :

$$\begin{matrix} -2x + y - 2 = 0 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{matrix} \quad \text{với} \quad \frac{-2}{2} = \frac{1}{-1} \neq \frac{-2}{-3}.$$

Hai đường thẳng này song song với nhau.

- Nếu $m = \frac{5}{2}$ ta được hai đường thẳng :

$$\begin{matrix} 3x + y - 2 = 0 \\ 9x + 3y - 6 = 0 \end{matrix} \quad \text{với} \quad \frac{3}{9} = \frac{1}{3} = \frac{-2}{-6}.$$

Hai đường thẳng trùng nhau.

3.47 $\Delta_1 : mx + y - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 3 - mx.$

Thay vào phương trình của $\Delta_2 : x + m(3 - mx) - 2m - 1 = 0.$

$$\Leftrightarrow \quad (1 - m^2)x + m - 1 = 0$$

Với $m \neq \pm 1$: $x = \frac{1 - m}{1 - m^2} = \frac{1}{1 + m}.$

Với $m \in Z, \quad x \in Z \quad \Rightarrow \quad y \in Z.$

$$x \in Z \quad \Leftrightarrow \quad 1 + m = \pm 1 \quad \Leftrightarrow \quad m = 0 \text{ hoặc } m = -2.$$

Kết luận : Với m = 0 hoặc m = −2 thì Δ_1 và Δ_2 cắt nhau tại những điểm có tọa độ nguyên.

3.48 Tọa độ giao điểm A(11; −5).

§3. Đường tròn

3.56 **a)** $(x - 1)^2 + (y - 6)^2 = 5$ **b)** $x^2 + y^2 - 9x - 5y + 14 = 0.$

3.57 **a)** $d(I;\Delta) = \dfrac{|3(-3) - 5.4 + 6|}{\sqrt{3^2 + 5^2}} = \dfrac{23}{\sqrt{34}} = R$

Phương trình đường tròn : $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = R^2 = \dfrac{529}{34}$.

b) Phương trình tổng quát của đường tròn là

$$(C) : x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0 \qquad (1)$$

với tâm $I(-A; -B)$ bán kính $R = \sqrt{A^2 + B^2 - C}$ với $A^2 + B^2 - C > 0$.

Vì (C) đi qua A(1; 3) và B(0; 2) nên tọa độ A, B thỏa mãn (1) :

$$\begin{cases} 1^2 + 3^2 + 2A + 6B + C = 0 \\ 2^2 + 0 + 4B + C = 0 \end{cases}$$

$$d(I;\Delta) = \frac{|-A + B + 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = R = \sqrt{A^2 + B^2 - C}.$$

Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 2A + 6B + C + 10 = 0 \\ 4B + C + 4 = 0 \\ \dfrac{|-A + B + 1|}{\sqrt{2}} = \sqrt{A^2 + B^2 - C} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{2} \\ B = -\dfrac{5}{2} \\ C = 6 \end{cases}$$

Đường tròn cần tìm có phương trình $x^2 + y^2 - x - 5y + 6 = 0$.

3.58 **a)** Đường tròn tiếp xúc với các trục tọa độ nên tâm nằm trên các đường phân giác của các góc phần tư, tức là các đường $x + y = 0$ và $x - y = 0$. Gọi I(a; b) là tâm đường tròn thì $\begin{cases} a + b = 0 \\ a - b = 0 \end{cases}$

Khoảng cách từ I(a; b) đến các trục tọa độ : $y = 0$, $x = 0$ là

$$d = |b| \quad \text{và} \quad d = |a|$$

Đường tròn cần tìm có phương trình :

$(C_1) : (x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2$ hoặc $(C_2) : (x - a)^2 + (y + a)^2 = a^2$

Vì điểm A(2; 4) thuộc đường tròn nên ta có :

$(2 - a)^2 + (4 - a)^2 = a^2$ (1) hoặc $(2 - a)^2 + (4 + a)^2 = a^2$ (2)

Phương trình (2) vô nghiệm. Phương trình (1) có các nghiệm a = 2 và a = 10. Các phương trình cần tìm :

$$(x-2)^2+(y-2)^2=4 \quad \text{và} \quad (x-10)^2+(y-10)^2=100$$

b) Tâm I(a; b) là giao điểm của đường $2x-y=0$ và đường trung trực của đoạn thẳng AB. Bán kính đường tròn $R = IA = IB$.

Đáp số : $(x+3)^2+(y+6)^2=113$.

c) Tâm I(a; b) của đường tròn tiếp xúc trục Ox có bán kính R = 1, nên có : $(x-a)^2+(y-b)^2=1=b^2$.

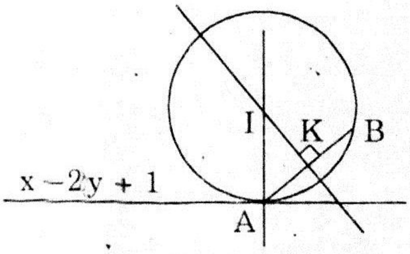
$$I(a;b) \in \Delta : x+y-3=0 \quad \Rightarrow \quad a+b-3=0$$

Thay $b = \pm 1$ thì được : a = 2 hoặc a = 4.

Các đường tròn $(C_1) : (x-2)^2+(y-1)^2=1$,

$(C_2) : (x-4)^2+(y+1)^2=1$.

d) Tâm I của đường tròn là giao điểm của đường thẳng vuông góc với đường thẳng $x-2y+1=0$ tại điểm A(1; 0) với đường trung trực của AB.



$$\begin{cases} 2(x-1)+y=0 & (AI) \\ 2(x-2)-6(y+3)=0 & (KI) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad I\left(\frac{17}{7}; -\frac{20}{7}\right)$$

Phương trình đường tròn cần tìm : $\left(x-\frac{17}{7}\right)^2+\left(y+\frac{20}{7}\right)^2=\frac{500}{49}$.

3.59 **a)** Tâm I(a; b) của đường tròn nằm trên đường thẳng $x-3y+8=0$ song song và cách đều các đường thẳng $x-3y-2=0$ và $x-3y+18=0$, a, b là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} a-3b+8=0 \\ (a-4)^2+(b-2)^2=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} a=\dfrac{29}{5} \\ b=\dfrac{23}{5} \end{cases}$$

Hai đường tròn : $(C_1) : (x-1)^2+(y-3)^2=10$

và $(C_2) : \left(x-\frac{29}{5}\right)^2+\left(y-\frac{23}{5}\right)^2=10$.

b) Tâm của đường tròn cần tìm là giao điểm của đường phân giác của góc tạo bởi các đường thẳng $3x-y+3=0$ với $x-3y+9=0$

và đường x = 5 :

$$\begin{cases} x = 5 \\ \dfrac{3x - y + 3}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \dfrac{x - 3y + 9}{\sqrt{1^2 + 3^2}} \end{cases} \Rightarrow \quad I_1(5; -2)$$

$$\begin{cases} x = 5 \\ \dfrac{3x - y + 3}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = -\dfrac{x - 3y + 9}{\sqrt{1^2 + 3^2}} \end{cases} \Rightarrow \quad I_2(5; 8)$$

Bán kính của đường tròn :

$$R_1 = d(I_1; \Delta) = \frac{|3.5 + 2 + 3|}{\sqrt{3^2 + 1}} = 2\sqrt{10},$$

$$R_2 = \frac{|15 - 8 + 3|}{\sqrt{3^2 + 1}} = \sqrt{10}.$$

Các đường tròn : $(C_1) : (x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 40$

$(C_2) : (x - 5)^2 + (y - 8)^2 = 10.$

c) Hai đường tròn $(C_1) : (x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 10$

$$(C_2) : \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}.$$

3.60 **a)** Tâm I(a; b) với a, b phải thỏa mãn

$$\begin{cases} (a - 2)^2 + (b - 1)^2 = 8 \\ \dfrac{|a + b - 3|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \quad a = 4, b = 3 \text{ hoặc } \quad a = 0, b = -1$$

$(C_1) : (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 8$

$(C_2) : x^2 + (y + 1)^2 = 8.$

b) Tâm đường tròn nội tiếp là giao điểm của ba đường phân giác trong.

Đường phân giác tại đỉnh B :

$$\frac{3x - 4y + 36}{5} = -\frac{x - 4}{1} \quad \Leftrightarrow \quad 2x - y + 4 = 0$$

Đường phân giác tại đỉnh A :

$$\frac{x - 4}{1} = -\frac{4x + 3y + 23}{5} \quad \Leftrightarrow \quad 3x + y + 1 = 0$$

Tọa độ tâm : $\begin{cases} 2x - y + 4 = 0 \\ 3x + y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow I(-1; 2)$

Bán kính đường tròn : $R = d(I; AB) = |-1 - 4| = 5$.

Đường tròn nội tiếp : $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$.

3.61 **a)** $I(2; 3)$, $R = 4$ **b)** $I\left(\frac{12}{13}; -2\right)$, $R = 3$

3.62 **a)** $x + 1 = 0$ **b)** $3x - 4y - 10 = 0$.

3.63 **a)** $-8x + y + 26 = 0$

b) $I(-1; 2)$ $R = 3$.

Phương trình tổng quát của tiếp tuyến $A(x - 3) + B(y - 5) = 0$,

A, B thoa mãn : $d(I; \Delta) = \dfrac{|A(-1 - 3) + B(2 - 5)|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 3$

$$\Leftrightarrow \quad 7A^2 + 24AB = 0 \Leftrightarrow \quad A = 0 \text{ hoặc } A = -\frac{24}{7}, B = 1$$

Hai tiếp tuyến $\Delta_1 : y - 5 = 0$, $\Delta_2 : \dfrac{24}{7}(x - 3) - (y - 5) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad 24x - 7y - 37 = 0.$$

3.64 (C_1) có tâm $I_1(3; 0)$ bán kính $R_1 = 2$, (C_2) có tâm $I_2(6; 3)$ bán kính $R_2 = 1$. Tiếp tuyến có phương trình tổng quát $\Delta : Ax + By + C = 0$ với $A^2 + B^2 \neq 0$.

Δ tiếp xúc với $(C_1) \Leftrightarrow \dfrac{|3A + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 2$

Δ tiếp xúc với $(C_2) \Leftrightarrow \dfrac{|6A + 3B + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 1$

$$\Rightarrow \quad |3A + C| = 2|6A + 3B + C|.$$

Suy ra các tiếp tuyến chung là : $\Delta_1 : (9 + \sqrt{17})x - 8y - 33 - 9\sqrt{17} = 0$

$\Delta_2 : (9 - \sqrt{17})x - 8y - 33 + 9\sqrt{17} = 0$

$\Delta_3 : y - 2 = 0$

$\Delta_4 : x - 5 = 0$.

3.65 **a)** Các giao điểm $A(-2; -1)$, $B(4; -4)$.

b) Các tiếp tuyến $\Delta_1 : 8x + y + 17 = 0$, $\Delta_2 : 4x - 7y - 44 = 0$.

3.66 Đường tròn có tâm $I(2; 1)$ bán kính $R = \sqrt{2}$.

Tiếp tuyến có phương trình tổng quát $x + y + C = 0$.

Điều kiện tiếp xúc : $\dfrac{|2 + 1 + C|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad C = -1$ hoặc $C = -5$

Hai tiếp tuyến $\Delta_1 : x + y - 1 = 0$, $\Delta_2 : x + y - 5 = 0$.

Hai tiếp điểm $A(1; 0)$, $B(3; 2)$.

3.67 **a)** (C_1) có tâm $I_1(2; 3)$ bán kính $R_1 = 3$

(C_2) có tâm $I_2(5; 7)$ bán kính $R_2 = 2$.

Khoảng cách hai tâm $d = I_1I_2 = \sqrt{(5-2)^2 + (7-3)^2} = 5$.

$d = 3 + 2 = R_1 + R_2$ nên hai đường tròn tiếp xúc ngoài với nh

b) Giải hệ : $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0 \\ x^2 + y^2 - 10x \text{ [illegible] } 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ Tiếp điểm $A\left(\dfrac{19}{5}; \dfrac{27}{5}\right)$.

Tiếp tuyến tại tiếp điểm :

$$3\left(x - \frac{19}{5}\right) + 4\left(y - \frac{27}{5}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x + 4y - 33 = 0$$

3.68 **a)** (C_1) có tâm $I_1\left(\dfrac{7}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$ bán kính $R_1 = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

(C_2) có tâm $I_2\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{7}{2}\right)$ bán kính $R_2 = \dfrac{\sqrt{122}}{2}$.

Khoảng cách hai tâm $\quad d = I_1I_2 = \sqrt{\left(\dfrac{7}{2} - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{7}{2}\right)^2} = 3\sqrt{2}$.

$$R_1 - R_2 = \frac{\sqrt{122}}{2} - \frac{5\sqrt{2}}{2} < I_1I_2 < \frac{\sqrt{122}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2} = R_2 + R_1.$$

Vậy hai đường tròn cắt nhau.

b) Giải hệ phương trình dưới đây cho tọa độ các giao điểm :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 7x - y = 0 \\ x^2 + y^2 - x - 7y - 18 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

3.69 **a)** Với $m = 0$, ta có một đường thẳng : $-2x + 2y + 1 = 0$

$$m \neq 0,\ (C_m) : x^2 + y^2 - 2\left(\frac{2m+1}{m}\right)x + \frac{2}{m}y + \frac{2m+1}{m} = 0.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x-\frac{2m+1}{m}\right)^2+\left(y+\frac{1}{m}\right)^2=\frac{2m^2+3m+2}{m^2}$$

Tam thức $2m^2 + 3m + 2 > 0$ $\forall m$. Vậy phương trình (C_m) là phương trình đường tròn.

b) $$x^2+y^2-2\left(\frac{2m+1}{m}\right)x+\frac{2}{m}y+\frac{2m+1}{m}=0$$

Như vậy với $m \neq 0$, (C_m) là đường tròn có tâm $I(x_0; y_0)$ với :

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{2m+1}{m} = 2+\dfrac{1}{m} & (1) \\ y_0 = -\dfrac{1}{m} & (2) \end{cases}$$

Khử m từ (1) và (2) ta được $x_0 + y_0 = 2$. Suy ra khi m thay đổi thì tập hợp các tâm của đường tròn là đường thẳng $x + y - 2 = 0$.

c) $R = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{2m^2+3m+2}{m^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad m = -1$ hoặc $m = -2$.

Vậy trong họ (C_m) có hai đường tròn ứng với $m = -1$ và $m = -2$ có bán kính bằng 1 là :

$$x^2+y^2-2x-2y+1=0 \quad \text{và} \quad x^2+y^2-3x-y+\frac{3}{2}=0$$

d) Thay $x = 0$, $y = 0$ vào phương trình của (C_m) ta được :

$$\frac{2m+1}{m}=0 \quad \Leftrightarrow \quad m=-\frac{1}{2}.$$

Vậy ứng với $m = -\dfrac{1}{2}$ họ (C_m) có đường tròn $x^2 + y^2 - 4y = 0$ đi qua gốc tọa độ O.

e) Để gốc tọa độ O(0; 0) nằm ngoài các đường tròn (C_m) ta phải có :

$$0^2+0^2-2\left(\frac{2m+1}{m}\right).0+\frac{2}{m}.0+\frac{2m+1}{m}>0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} m < -\dfrac{1}{2} \\ m > 0 \end{array}\right.$$

§4. Đường elip

3.73 **a)** $x^2 + 25y^2 = 25 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{x^2}{25} + y^2 = 1$; $a = 5$, $b = 1$.

Độ dài trục lớn : $2a = 10$, độ dài trục nhỏ $2b = 2$. Các đỉnh $A_1(-5; 0)$, $A_2(5; 0)$, $B_1(0; -1)$, $B_2(0; 1)$.

b) $49x^2 + 64y^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{x^2}{\dfrac{1}{49}} + \dfrac{y^2}{\dfrac{1}{64}} = 1; \quad a = \dfrac{1}{7}, \ b = \dfrac{1}{8}.$

Độ dài trục lớn : $2a = \dfrac{2}{7}$, độ dài trục nhỏ $2b = \dfrac{1}{4}$.

Các đỉnh $A_1\left(-\dfrac{1}{7}; 0\right)$, $A_2\left(\dfrac{1}{7}; 0\right)$, $B_1\left(0; -\dfrac{1}{8}\right)$, $B_2\left(0; \dfrac{1}{8}\right)$.

3.74 **a)** $4x^2 + 5y^2 = 20 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{4} = 1;$

$a = \sqrt{5}, \quad b = 2, \quad c^2 = a^2 - b^2 = 1 \ \Rightarrow \ c = 1.$

Tọa độ tiêu điểm $F_1(-1; 0)$, $F_2(1; 0)$.

Tọa độ các đỉnh $A_1(-\sqrt{5}; 0)$, $A_2(\sqrt{5}; 0)$, $B_1(0; -2)$, $B_2(0; 2)$.

Tâm sai $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ $(c = \sqrt{a^2 - b^2})$

b) $x^2 + 4y - 64 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{16} = 1;$

$a = 8, \quad b = 4, \quad c = \sqrt{64 - 16} = 4\sqrt{3}.$

Tiêu điểm $F_1(-4\sqrt{3}; 0)$, $F_2(4\sqrt{3}; 0)$.

Các đỉnh $A_1(-8; 0)$, $A_2(8; 0)$, $B_1(0; -4)$, $B_2(0; 4)$.

Tâm sai $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

3.75 **a)** $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1.$

b) $2c = 6 \Rightarrow c = 3; \quad e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{5} \Rightarrow a = 5; \quad b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16$

$(E) : \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1.$

c) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{7} = 1.$

d) $a = 4, \quad \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{5}}{8} \Rightarrow c = \dfrac{\sqrt{5}}{2}, \quad b^2 = a^2 - c^2 = \dfrac{59}{4}.$

$(E): \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{4y^2}{59} = 1.$

e) Tiêu điểm $F_1(0; -4)$ trên trục tung nên elip có phương trình $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$ (xem bài 3.72) với $c = 4$, $a^2 - b^2 = c^2 = 16$. Vì elip đi qua điểm $(-1; \sqrt{15})$ nên $\dfrac{(-1)^2}{b^2} + \dfrac{15}{a^2} = 1 \Rightarrow b = 2$.

Vậy elip có phương trình chính tắc là : $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{20} = 1.$

3.76 **a)** Ta có $c = 2\sqrt{3}$. Elip $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ với $a^2 - b^2 = c^2 = 12$.

Thay $x = 1$, $y = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$ vào phương trình elip ta được :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{15}{4b^2} = 1 \\ a^2 - b^2 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a^2 = 16 \\ b^2 = 4 \end{matrix}$$

Vậy elip có phương trình chính tắc : $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1.$

b) Elip $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ đi qua $M\left(3; \dfrac{4}{5}\right)$, $N\left(-4; \dfrac{3}{5}\right)$ nên ta có :

$$\begin{cases} \dfrac{3^2}{a^2} + \dfrac{\left(\dfrac{4}{5}\right)^2}{b^2} = 1 \\ \dfrac{(-4)^2}{a^2} + \dfrac{\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}{b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} a^2 = 25 \\ b^2 = 1 \end{matrix}$$

Phương trình chính tắc của elip : $\dfrac{x^2}{25} + y^2 = 1.$

c) Elip $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ đi qua $M\left(1; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ nên : $\dfrac{1^2}{a^2} + \dfrac{(\sqrt{3} : 2)^2}{b^2} = 1$ (*)

Tâm sai : $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \dfrac{c^2}{a^2} = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow a^2 = 4b^2.$

Thay vào (*) thì được : $\frac{1}{4b^2} + \frac{3}{4b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad b^2 = 1,\ a^2 = 4$

Phương trình chính tắc của elip : $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

3.77 **a)** $4x^2 + 9y^2 = 36 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

$a = 3, \quad b = 2, \quad c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{5}.$

- Các tiêu điểm $F_1(-\sqrt{5};\ 0)$, $F_2(\sqrt{5};\ 0)$.
- Tâm sai $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

b) M(2; k) thuộc elip khi và chỉ khi : $\frac{2^2}{9} + \frac{k^2}{4} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad k = \pm\frac{2\sqrt{5}}{3}$.

c) Theo công thức tính bán kính qua tiêu :

$$MF_1 = a + \frac{c}{a}x = 3 + \frac{\sqrt{5}}{3}.2 = \frac{9 + 2\sqrt{5}}{3}$$

$$MF_2 = a - \frac{c}{a}x = 3 - \frac{\sqrt{5}}{3}.2 = \frac{9 - 2\sqrt{5}}{3}.$$

§5. Đường hyperbol

3.81 **a)** $4x^2 - 16y^2 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{\frac{9}{4}} - \frac{y^2}{\frac{9}{16}} = 1$

$a^2 = \frac{9}{4} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{3}{2}$, độ dài trục thực $2a = 3$.

$b^2 = \frac{9}{16} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{3}{4}$, độ dài trục ảo $2b = \frac{3}{2}$.

$c^2 = a^2 + b^2 = \frac{9}{4} + \frac{9}{16} = \frac{45}{16} \Rightarrow c = \frac{3\sqrt{5}}{4}$. Tiêu cự : $2c = \frac{3\sqrt{5}}{2}$.

b) **Tâm sai** : $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Tọa độ đỉnh $A_1\left(-\frac{3}{2};\ 0\right)$, $A_2\left(\frac{3}{2};\ 0\right)$.

Tiêu điểm : $F_1\left(-\frac{3\sqrt{5}}{4};\ 0\right)$, $F_2\left(\frac{3\sqrt{5}}{4};\ 0\right)$.

c) Tiệm cận $y = \pm\frac{1}{2}x$. Các đường chuẩn : $x + \frac{3}{\sqrt{5}} = 0$, $x - \frac{3}{\sqrt{5}} = 0$.

3.82 $3x^2 - 9y^2 = 12 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{\frac{4}{3}} = 1$

a) Tọa độ đỉnh $A_1(-2;\ 0)$, $A_2(2;\ 0)$.

Tiêu điểm $F_1\left(-\frac{4\sqrt{3}}{3};\ 0\right)$, $F_2\left(\frac{4\sqrt{3}}{3};\ 0\right)$.

Tâm sai $e = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Đường chuẩn $\Delta_1 : x + \sqrt{3} = 0$; $\Delta_2 = x - \sqrt{3} = 0$.

b) Thay $y = kx$ vào phương trình của hyperbol ta được :

$$3x^2 - 9k^2x^2 = 12 \Leftrightarrow x^2(3 - 9k^2) = 12 \quad (1)$$

Đường thẳng $y = kx$ cắt hyperbol khi và chỉ khi phương trình (1) có nghiệm. Điều này xảy ra khi $3 - 9k^2 > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < k < \frac{1}{3}$.

3.83 a) Phương trình : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$2a = 10 \Rightarrow a = 5$; $e = \frac{c}{a} = \frac{7}{5} \Rightarrow c = 7$; $b = \sqrt{c^2 - a^2} = 2\sqrt{6}$.

Phương trình chính tắc của hyperbol : $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{24} = 1$.

b) $\begin{cases} a = \sqrt{15} \\ \frac{5^2}{a^2} - \frac{(-2)^2}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow (H) : \frac{x^2}{15} - \frac{y^2}{6} = 1$.

c) Phương trình chính tắc của hyperbol đi qua $P(2\sqrt{7};\ -3)$ và $Q(-7;\ 6\sqrt{2})$: $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{75} = 1$.

d) $\begin{cases} \frac{(-2)^2}{a^2} - \frac{(2\sqrt{3})^2}{b^2} = 1 \\ \frac{b}{a} = 2 \end{cases} \Rightarrow x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$.

3.84. $MF_1^2 = (x - 0)^2 + (y + c)^2$

$MF_2^2 = (x - 0)^2 + (y - c)^2$

$$\begin{cases} MF_1^2 - MF_2^2 = 2cy \\ |MF_1 - MF_2| = 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MF_1 = \left|a + \dfrac{cy}{a}\right| \\ MF_2 = \left|a - \dfrac{cy}{a}\right| \end{cases} \Rightarrow \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \ (*)$$

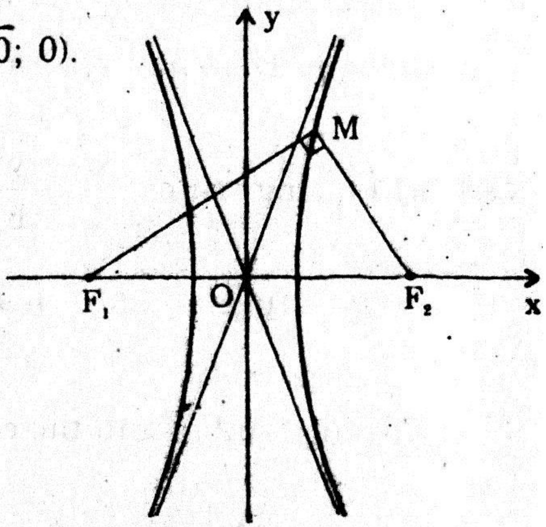
với $c^2 - a^2 = b^2$.

Vậy tập hợp các điểm M(x; y) thỏa mãn điều kiện đề bài là hyperbol có phương trình chính tắc (*).

Hyperbol có phương trình (*) có trục thực trên trục tung y'y. Độ dài trục thực bằng 2a, trục ảo độ dài 2b nằm trên trục hoành nhận $F_1(0; -c)$ và $F_2(0; c)$ làm các tiêu điểm.

3.85 a) $9x^2 - y^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{1} - \dfrac{y^2}{9} = 1$; $a = 1, b = 3, c = \sqrt{10}$.

Các tiêu điểm $F_1(-\sqrt{10}; 0)$ và $F_2(\sqrt{10}; 0)$.



b) Điểm M thuộc (H) sao cho $\widehat{F_1MF_2} = 90^0$ thì M là giao của đường tròn đường kính F_1F_2 với hyperbol (H). Tọa độ của M là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 - \dfrac{y^2}{9} = 1 \end{cases}$$

Suy ra có 4 điểm thuộc (H) thỏa mãn yêu cầu là :

$$M_1\left(\frac{\sqrt{190}}{10}; \frac{9\sqrt{10}}{10}\right), \quad M_2\left(-\frac{\sqrt{190}}{10}; \frac{9\sqrt{10}}{10}\right),$$

$$M_3\left(\frac{\sqrt{190}}{10}; -\frac{9\sqrt{10}}{10}\right), \quad M_4\left(-\frac{\sqrt{190}}{10}; -\frac{9\sqrt{10}}{10}\right).$$

§6. Đường parabol

3.88 a) $y^2 = 18x$ có tham số tiêu $p = 9$, tọa độ đỉnh O(0; 0), tiêu điểm $F\left(\dfrac{9}{2}; 0\right)$, đường chuẩn $x + \dfrac{9}{2} = 0$.

b) $y^2 = -\sqrt{5}x$ có tham số tiêu $p = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$, đỉnh O(0; 0), đường chuẩn $x = \dfrac{\sqrt{5}}{4}$.

c) $4x^2 + 16y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = -4y$.

Parabol nhận trục tung Oy là trục đối xứng, đi qua điểm O(0; 0) là đỉnh của parabol. Tham số tiêu p = 2, tiêu điểm F(0; –1), đường chuẩn y = 1.

3.89 **a)** Parabol có tham số tiêu p = 10 sẽ có phương trình $y^2 = 2px$ hoặc $y^2 = -2px$. Tiêu điểm là F(–5; 0) hoặc F(5; 0), đường chuẩn x = 5 hoặc x = –5.

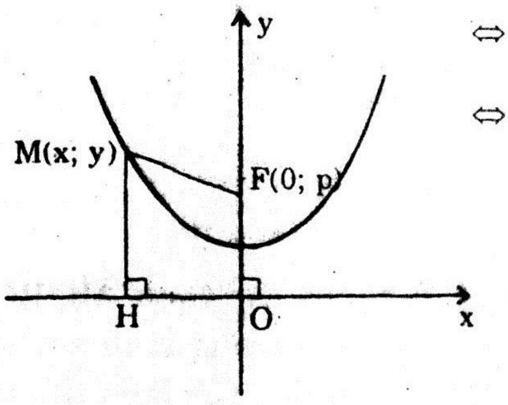
b) $y^2 = 24x$.

3.90 **a)** $y^2 = 16x$ **b)** $y^2 = 8x$.

3.91 Điều kiện $MF = MH \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y - p)^2} = |y|$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y - p)^2 = y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 2py - p^2 = 2p\left(y - \frac{p}{2}\right)$$



Quỹ tích là parabol nhận Oy làm trục đối xứng, đỉnh $S\left(0; \dfrac{p}{2}\right)$, đường chuẩn y = 0.

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG III

3.92 **a)** Vectơ chỉ phương $\vec{u}(8; 8)$, vectơ pháp tuyến $\vec{n}(-1; 1)$.

b) Phương trình đường thẳng BC : $\dfrac{x - 4}{8} = \dfrac{y + 3}{8} \Leftrightarrow x - y - 7 = 0$

Độ dài đường cao kẻ từ đỉnh O của tam giác OBC bằng khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng BC.

$$h_O = d(O, BC) = \frac{|0 - 0 - 7|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}.$$

c) Phương trình cạnh OC : $y = \dfrac{5}{12}x \quad \Leftrightarrow \quad 5x - 12y = 0$

Đường thẳng Δ qua B song song với OC có phương trình :

$$5(x - x_B) - 12(y - y_B) = 5(x - 4) - 12(y + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x - 12y - 56 = 0.$$

3.93 **a)** $\frac{x}{-\frac{3}{2}} + \frac{y}{1} = 1$

b) Vectơ chỉ phương của (d) : $\vec{u}(3; 2)$, điểm $M(0; 1) \in (d)$.

Phương trình dạng tham số của (d) : $\begin{cases} x = 3t \\ y = 1 + 2t, \ t \in R \end{cases}$

c) $\vec{u}(3; 2)$ là vectơ pháp tuyến của (d_1). Phương trình của (d_1) là :

$$3(x - x_M) + 2(y - y_M) = 0 \Leftrightarrow 3(x - 1) + 2(y - 6) = 0$$
$$\Leftrightarrow 3x + 2y - 15 = 0.$$

d) Giao điểm của (d) và (d_1) là H có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình : $\begin{cases} 2x - 3y + 3 = 0 \\ 3x + 2y - 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow H(3; 3)$

N đối xứng với M qua (d) có tọa độ $(x_N; y_N)$ với :

$$\begin{matrix} x_N = 2x_H - x_M = 6 - 1 = 5 \\ y_N = 2y_H - y_M = 6 - 6 = 0 \end{matrix} \Rightarrow N(5; 0)$$

3.94 **a)** Giả sử M, N, P theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CA của tam giác ABC. Theo tính chất của đường trung bình suy ra các vectơ chỉ phương của các đường thẳng AB, BC, CA theo thứ tự là $\overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{MN}$.

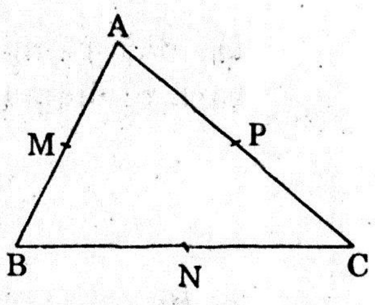
Ta có : $\overrightarrow{PN} = (-8; 8)$, $\overrightarrow{PM} = (-10; -2)$, $\overrightarrow{MN} = (2; 10)$.

Các đường thẳng chứa các cạnh AB, BC, CA có phương trình :

AB : $\frac{x+1}{-8} = \frac{y+1}{8} \Leftrightarrow x + y + 2 = 0$

BC : $\frac{x-1}{10} = \frac{y-9}{2} \Leftrightarrow x - 5y + 44 = 0$

AC : $\frac{x-9}{2} = \frac{y-1}{10} \Leftrightarrow 5x - y - 44 = 0.$



b) Đường trung trực của AB có phương trình $x - y = 0$, trung trực của BC có phương trình là $5x + y - 14 = 0$.

Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là I có tọa độ là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 5x + y - 14 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad I\left(\frac{7}{3}; \frac{7}{3}\right)$$

Tọa độ đỉnh A : $\begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ 5x - y - 44 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad A(7; -9)$

Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác :

$$R = AI = \sqrt{\left(7 - \frac{7}{3}\right)^2 + \left(-9 - \frac{7}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{1352}}{3}.$$

3.95 **a)** $D = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 43 \neq 0$. Vậy (d_1) và (d_2) cắt nhau.

Tọa độ giao điểm K của (d_1) và (d_2) :

$$x_K = \frac{\begin{vmatrix} -6 & -2 \\ 21 & 7 \end{vmatrix}}{D} = 0 \qquad y_K = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 4 & 21 \end{vmatrix}}{D} = \frac{129}{43} = 3$$

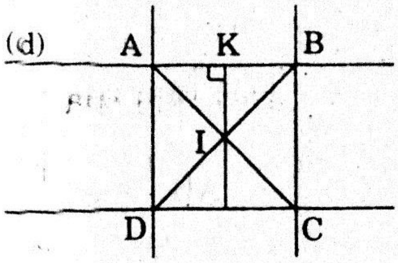
Giao điểm K(0; 3).

b) $\cos(d_1, d_2) = \frac{|5.4 - 2.7|}{\sqrt{5^2 + 2^2}\sqrt{4^2 + 7^2}} = \frac{6}{\sqrt{1885}} \Rightarrow \quad (d_1, d_2) \approx 82^0 03'$.

c) Các đường phân giác của các góc tạo bởi d_1 và d_2 :

$$\frac{5x - 2y + 6}{\sqrt{5^2 + 2^2}} = \pm \frac{4x + 7y - 21}{\sqrt{4^2 + 7^2}}.$$

3.96 Giả sử canh AB của hình vuông ABCD nằm trên đường thẳng (d) : x + 3y − 3 = 0. Cạnh CD nằm trên đường thẳng (d_1) đối xứng với (d) qua tâm I. Điểm M(3; 0) ∈ d thì $N(x_N; y_N)$ đối xứng với M qua I nằm trên (d_1) :



$$\begin{cases} x_N = 2x_I - x_M = -4 - 3 = -7 \\ y_N = 2y_I - y_M = 0 - 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad N(-7; 0).$$

(d_1) chứa cạnh BC có phương trình :

$$1(x + 7) + 3(y - 0) = 0 \iff x + 3y + 7 = 0$$

Gọi K là chân đường vuông góc kẻ từ I đến đường thẳng AB ta có :

$$IA = IB = IC = ID = IK\sqrt{2}.$$

$$IK = d(I; AB) = \frac{-2 + 3.0 - 3}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{5}{\sqrt{10}}$$

$$IB = IK\sqrt{2} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{10}} = \sqrt{5}.$$

Các đỉnh A, B là giao điểm của đường tròn $(I; IK\sqrt{2})$ với (d) :

$$\begin{cases}(x + 2)^2 + y^2 = 5 \\ x + 3y - 3 = 0\end{cases} \Rightarrow \quad A(0; 1), B(-3; 2) \text{ hoặc } A(-3; 2), B(0; 1)$$

Suy ra phương trình các cạnh của hình vuông là :

$$x + 3y - 3 = 0, \qquad x + 3y + 7 = 0,$$

$$3x - y + 11 = 0 \text{ và } \quad 3x - y + 1 = 0.$$

Hai đường chéo : $x - 2y + 2 = 0$ và $2x + y + 4 = 0$.

3.97. Đường trung trực của AB : $x - 2y - 2 = 0$.

Tọa độ tâm đường tròn : $\begin{cases}2x - y - 1 = 0 \\ x - 2y - 2 = 0\end{cases} \Rightarrow \quad I(0; -1).$

Phương trình của đường tròn :

$$x^2 + (y + 1)^2 = IA^2 \Leftrightarrow \quad x^2 + (y + 1)^2 = 5$$

3.98. Đường phân giác tạo bởi các đường thẳng (d_1) : $x + y + 4 = 0$ và (d_2) : $7x - y + 4 = 0$ là :

$$\frac{x + y + 4}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \pm\frac{7x - y + 4}{\sqrt{7^2 + 1^2}}$$

Các tâm của các đường tròn thỏa mãn đề bài :

$$\begin{cases}4x + 3y - 2 = 0 \\ \dfrac{x + y + 4}{\sqrt{2}} = \dfrac{7x - y + 4}{\sqrt{50}}\end{cases} \Rightarrow \quad I_1(2; -2)$$

$$\begin{cases}4x + 3y - 2 = 0 \\ \dfrac{x + y + 4}{\sqrt{2}} = -\dfrac{7x - y + 4}{\sqrt{50}}\end{cases} \Rightarrow \quad I_2(-4; 6)$$

Bán kính đường tròn (C_1) và (C_2) :

$$R_1 = d(I_1, d_1) = \frac{|2 - 2 + 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 2\sqrt{2};$$

$$R_2 = d(I_2, d_2) = \frac{|-4 + 6 + 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 3\sqrt{2}.$$

Có hai đường tròn : $(C_1) : (x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 8$

$(C_2) : (x + 4)^2 + (y - 6)^2 = 18.$

3.99 **a)** $(C) : (x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 4$; tâm $I(-3; -2)$; bán kính $R = 2$.

b) Khoảng cách từ $I(-3; -2)$ đến $\Delta : x - y + 2 = 0$ là :

$$d(I; \Delta) = \frac{|-3 + 2 + 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} < R = 2$$

Do đó Δ cắt đường tròn (C).

c) Tọa độ $A(-1; -2)$ nghiệm đúng phương trình đường tròn.

Vậy $A \in (C)$. Phương trình tiếp tuyến với đường tròn tại A là :

$$(-1 + 3)(x + 1) + (-2 + 2)(y + 2) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0.$$

d) Đường thẳng D đi qua điểm $P(2; 1)$ có phương trình dạng

$$A(x - 2) + B(y - 1) = 0.$$

(D) tiếp xúc với đường tròn khi và chỉ khi :

$$d(I; D) = R \Leftrightarrow \frac{|A(-3 - 2) + B(-2 - 1)|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 2.$$

Suy ra hai tiếp tuyến với (C) đi qua $P(2; 1)$ là :

$$(15 + \sqrt{120})(x - 2) - 21(y - 1) = 0 \Leftrightarrow (15 + 2\sqrt{30})x - 21y - 9 - 4\sqrt{30} = 0$$

$$(15 - \sqrt{120})(x - 2) - 21(y - 1) = 0 \Leftrightarrow (15 - 2\sqrt{30})x - 21y - 9 + 4\sqrt{30} = 0$$

3.100 **a)** (C_1) có tâm $I_1(2; 1)$, bán kính $R_1 = 5$.

(C_2) có tâm $I_2\left(\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right)$, bán kính $R_2 = 3$.

$$d = I_1I_2 = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - 2\right)^2 + \left(\frac{7}{2} - 1\right)^2} = \frac{\sqrt{34}}{2}$$

Vì $R_1 - R_2 = 5 - 3 < d < R_1 + R_2 = 8$ nên (C_1) và (C_2) cắt nhau.

b) $$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0 \\ x^2 + y^2 - x - 7y + \frac{7}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \approx 2,63 \\ y \approx 6,28 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x \approx -2,96 \\ y \approx 2,92 \end{cases}$$

3.101 a) $9x^2 - 16y^2 - 64 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{x^2}{\dfrac{64}{9}} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{8}{3}, \quad b = 2, \quad c = \frac{10}{3}.$$

Độ dài trục thực $2a = \dfrac{16}{3}$, trục ảo $2b = 4$, tiêu cự $2c = \dfrac{20}{3}$.

Tâm sai $e = \dfrac{5}{4}$, tiêu điểm $F_1\left(-\dfrac{10}{3}; 0\right)$, $F_2\left(\dfrac{10}{3}; 0\right)$.

Tiệm cận $y = \pm\dfrac{3}{4}x$,

Đường chuẩn $\Delta_1 : x + \dfrac{32}{15} = 0$, $\Delta_2 : x - \dfrac{32}{15} = 0$.

b) Elip $(E) : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ với $c^2 = a^2 - b^2 = \dfrac{100}{9}$, $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{5}$.

$$\Rightarrow \quad (E) : \frac{x^2}{\dfrac{2500}{81}} + \frac{y^2}{\dfrac{1600}{81}} = 1.$$

TRẢ LỜI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM ÔN CUỐI NĂM

1. C	**2.** B	**3.** C	**4.** D	**5.** A	**6.** D
7. D	**8.** B	**9.** D	**10.** A	**11.** D	**12.** C
13. A	**14.** C	**15.** D	**16.** C	**17.** B	**18.** A
19. B	**20.** C	**21.** D	**22.** A	**23.** A	**24.** C
25. C	**26.** A	**27.** D	**28.** B	**29.** C	**30.** A
31. B	**32.** B	**33.** B	**34.** C		

MỤC LỤC

Chương I. Vectơ

§1. **Vectơ**. Phép cộng và phép trừ vectơ 3
§2. **Tích của** một vectơ với một số 6
§3. **Trục** tọa độ và hệ trục tọa độ 13
Bài tập ôn chương I 21

Chương II. Tích vô hướng của hai vectơ và ứng dụng

§1. Giá trị lượng giác của một góc bất kì (từ 0° đến 180°) 23
§2. Tích vô hướng của hai vectơ 29
§3. Hệ thức lượng trong tam giác 40
Vấn đề tham khảo. Hệ thức lượng trong đường tròn 50
Bài tập ôn chương II 54

Chương III. Phương pháp tọa độ trong mặt phẳng

§1. Phương trình của đường thẳng 56
§2. Khoảng cách và góc 64
§3. Đường tròn 71
§4. Đường elip 81
§5. Đường hyperbol 85
§6. Đường parabol 90
Bài tập ôn chương III 93
Bài tập trắc nghiệm ôn cuối năm 95
Phần II. LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ 101